

HÉCTOR L. MANCINI
ES DOCTOR EN FÍSICA Y SE
DESEMPEÑA COMO PROFESOR
ORDINARIO EMÉRITO DE LA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
UNIVERSIDAD DE NAVARRA,
ESPAÑA. FUE DIRECTOR DEL
INSTITUTO DE FÍSICA DE LA
UNIVERSIDAD DE NAVARRA,
DIRECTOR DE PROYECTOS DEL
CENTRO DE INVESTIGACIONES
EN LÁSERES Y APLICACIONES
(CEILAP), DEL CONSEJO
NACIONAL DE INVESTIGACIONES
CIENTÍFICAS (CONICET) Y DEL
MINISTERIO DE DEFENSA
(ARGENTINA).

TAMAÑO, FORMA Y FUNCIÓN EN LA NATURALEZA

LOS SISTEMAS COMPLEJOS: PUENTES ENTRE LA FÍSICA Y OTRAS DISCIPLINAS

PALABRAS CLAVES:
SISTEMAS DINÁMICOS
COMPLEJOS, PATRONES
REPETITIVOS EN LA
NATURALEZA, ADN,
GALAXIAS

KEYWORDS:
COMPLEX DYNAMIC
SYSTEMS, REPEATED
PATTERNS IN NATURE,
DNA, GALAXIES

RESUMEN. Este trabajo de divulgación presenta una panorámica, necesariamente limitada por la extensión, de las formas o patrones que se repiten en la naturaleza a muchas escalas. Esas estructuras son parte, o lo han sido, de sistemas dinámicos complejos fuera de equilibrio, es decir, productos del movimiento de la materia. Algunas, como las formas derivadas de las espirales, se extienden desde escalas moleculares a escalas astronómicas y son el eje director de este trabajo, que describe algunas características, desde las galaxias hasta la doble hélice del ADN. A su lado, se mencionan otras formas, también frecuentes tanto en la naturaleza como en experimentos de laboratorio, que suelen ser un banco de prueba para la teoría de los sistemas dinámicos no lineales.

ABSTRACT. This work presents an overview, necessarily limited on account of its extension, on the forms and patterns that appear repeatedly in nature at various scales. These structures form part of complex dynamic systems that have gone out of equilibrium, that is, they are the result of the movement of matter. Some of these structures, such as spiral-derived forms, extend from molecular to astronomical scales and constitute the central focus of this study, which describes only a few features, ranging from the DNA double helix to galaxies. Other forms, also common in nature as well as in laboratory experiments, are described, which are often used as a test bed for the theory of non-linear dynamical systems.

1. INTRODUCCIÓN

Comprendemos la naturaleza porque en ella reconocemos pautas, recurrencias o formas que suelen repetirse a diferentes escalas espaciales y con diferentes tiempos característicos. Estas regularidades aparecen en las escalas macroscópicas de la astrofísica, con tiempos que se miden en miles de millones de años, en escalas microscópicas, en distribuciones atómicas o en moléculas (como la famosa doble hélice del ADN), con actividades físico-químicas que ocurren en tiempos del orden de la mil billonésima parte de un segundo y se extienden aún en los seres vivos. También en las partículas elementales componentes de los núcleos atómicos, cuyos tiempos escapan a toda representación mental por su fugacidad.

En el medio, a escala planetaria, nos encontramos con esos sistemas más complejos del universo que conocemos, los seres vivos, entre ellos nosotros mismos, donde vuelven a surgir formas con dinámicas que guardan las mismas simetrías típicas a escalas mayores o menores. Las encontramos, por ejemplo, en fenómenos atmosféricos, terrestres o marítimos, en el flujo de líquidos o gases y en multitud de fenómenos de los tipos más diversos y, en particular, en el cerebro humano, la estructura más compleja del universo conocido.

El primer problema para la ciencia ha sido, y aún lo es, describir y clasificar en lenguaje matemático esas estructuras, que suelen llamarse configuraciones si son en el espacio y ritmos cuando ocurren también en el tiempo. Más allá de la descripción puramente matemática de la forma, aunque a veces se pueda complicar mucho, como en el caso de los objetos fractales (o que tienen dimensiones fraccionarias), está la cuestión dinámica de por qué las formas se mueven y cambian con el tiempo, es decir, se transforman.

En este caso, para describirlas necesitamos variables que dependan simultáneamente del espacio y del tiempo, un problema más complejo, ya que implica describir para un sistema o forma, cuáles son sus posibilidades de movimiento y de transformación, es decir, de pasar de una forma a otra y cuáles son las causas que provocan esos cambios. Sobre esta base podremos conocer qué función o funciones puede desempeñar un sistema compuesto que forma parte de otro de mayor tamaño.

Por lo general decimos que una estructura aparece fuera del equilibrio cuando lo hace en una situación “normalmente inestable”, porque la variación de algún parámetro externo llevó al sistema de un estado anterior de equilibrio estático, donde se sostenía una forma determinada, a perder estabilidad y sufrir una “transición de fase” (en sentido termodinámico) evolucionando a un nuevo estado con una forma o patrón diferente (Manneville, 1991; Cross y Hohenberg, 1993; Haken, 1984; Nicolis y Prigogine, 1977; Stevens, 1986). Es decir, la emergencia de nuevas formas está relacionada con el tema de la estabilidad del equilibrio en un determinado espacio de variables. Hoy entendemos por “espacio” a un campo de variables que utilizamos para describir estados de la materia en función de esas variables y del tiempo.

La relatividad general describe la fuerza de gravedad, una atracción física debida a la propiedad de la materia que llamamos masa, como la curvatura que provoca en el espacio que la rodea. En esta descripción, quitamos la materia y ya no hay espacio. No vamos a comentar patrones de este tipo, pero cabe preguntarse, inclusive en ellos:

- ¿Por qué se forman patrones repetitivos en sistemas abiertos fuera del equilibrio?
- ¿Por qué ocurren estas formas y no otras? ¿Qué selecciona una forma?
- ¿Las formas pueden competir entre sí? ¿En qué condiciones?
- ¿Hay alguna limitación para el máximo tamaño alcanzable por una forma determinada?
- ¿Cuánto tiempo una forma que aparece fuera del equilibrio puede permanecer “estable”?
- ¿Qué significa “estable” en un universo en expansión, donde todo está en movimiento y nada permanece?

Podemos plantear este tipo de preguntas desde la perspectiva específica que cobra cada problema en cada ciencia particular, como son la química, la biología, la ecología o la ingeniería. La física es la ciencia que ensaya respuestas comunes desde la base misma del concepto de forma, como una manera general para lograr una respuesta común y cuantitativa, a diferencia de la filosofía, que lo intenta de manera cualitativa.



Figura 1a. Andrómeda, una galaxia en espiral (NASA, telescopio Hubble)



Figura 1b. Galaxia de Bode (o galaxia en doble espiral "M81", NASA, telescopio Spitzer)



Figura 2. Borrasca en el Caribe (del Servicio Meteorológico Nacional, EEUU)



Figura 3a. Ordenamiento en espiral de las semillas de girasol (fotografía del autor)



Figura 3b. Ordenamiento en espiral de los frutos de un pino

No obstante la búsqueda de las respuestas más básicas, por la amplitud y la similitud de estos patrones en distintos ámbitos, en realidad se trata de un problema interdisciplinar donde todas las perspectivas son necesarias (Stewart y Golubitsky, 1992).

El pensamiento humano ha creado las geometrías (euclídeas y no euclídeas) y la topología para clasificar las formas como una abstracción. Pero la representación matemática de las formas geométricas naturales, como los números, son una abstracción matemática cuya sede es el cerebro humano. Como en el caso de los números naturales, el 1, 2, 3, etc., si los buscamos en la naturaleza, esos números no aparecen por ningún lado. Lo que aparecen son cosas numerables: por ejemplo, 3 caballos, 3 mesas o 3 amores. Cosas que podemos ordenar en grupos. Pero el número 3, aquello que tienen en común esas cosas, ese número no es una "cosa", solo está en el cerebro que busca qué tienen en común y descubre que es el número 3, una abstracción.

La naturaleza, a pesar de la afirmación de Galileo Galilei (1945 [1638] y Bossomaier y Green, 1998), no está escrita en ningún lenguaje, es muda (*res non verba*). Es el hombre quien la expresa. Por eso la matemática, para las llamadas ciencias naturales experimentales, es un lenguaje, el más importante, porque el lenguaje matemático permite predecir calculando. Hoy no se puede entender la ciencia sin utilizar la mejor matemática disponible, pero simultáneamente no se debe olvidar aquello que el realismo filosófico (crítico) nos recuerda: "La verdad está en las cosas y no en nuestras abstracciones". Por eso, necesitamos una verificación experimental de nuestras afirmaciones o una medida directa sobre la naturaleza. Conocer es saber medir.

A. LAS FORMAS EN ESPIRAL

De las formas geométricas puras que conocemos, una de las que identificamos con más frecuencia en la naturaleza es la forma en espiral. Conocida desde la Antigüedad, fue utilizada para modelar trayectorias de cuerpos móviles que, con un movimiento circular, se acercan o alejan de un centro mientras giran. Es decir, son causadas por fuerzas "no centrales" en el espacio que, sumadas, se reducen a la acción de una fuerza resultante más un momento angular (Feynman *et al.*, 1964).

Las reconocemos como formas de torbellinos (vórtices) en flujos de aguas o en volutas de humos, flujos de gases, en la distribución de densidades en agregaciones de partículas sometidas a un movimiento colectivo, como las estrellas en una galaxia; en el crecimiento de las semillas en una piña, etc. Desde la Antigüedad se conocen formas en espiral de muchos tipos en el plano o arrolladas en el espacio sobre diferentes superficies de base, formando hélices y helicoides con diferentes aplicaciones, principalmente en ingeniería. Se han estudiado arrollamientos espaciales sobre las superficies de los sólidos regulares, como cilindros, conos, esferas, etc.

Iniciaremos este trabajo prestando particular atención a la forma helicoidal y concluiremos esta parte con la doble espiral del ADN, base de la información entre los seres vivos.

En las Figuras 1 a 3b, reconocemos muchas de esas espirales y helicoides que se expanden por todas las escalas del universo. Podemos identificar esa base geométrica en sistemas físicos, que van desde escalas astronómicas a microscópicas y también en multitud de seres vivos (Thompson, 1947).

Todo en la naturaleza se mueve por la influencia de distintas combinaciones de las cuatro interacciones fundamentales conocidas. Independientemente del origen de las fuerzas que actúan (o de las causas físicas subyacentes), las espirales aparecerán cuando la combinación de fuerzas actuantes produzca dos efectos netos: una traslación y una rotación (Feynman *et al.*, 1964). Esas dos causas físicas deben poder identificarse en las ecuaciones que representen el movimiento describiendo esa forma.

El resultado de la composición de esos dos movimientos, circular y radial, crea distintos tipos de espirales. Las más sencillas, que descansan sobre una superficie plana —dos dimensiones (2D)—, son las curvas que llevan ese nombre propiamente dicho y son conocidas desde Arquímedes.

Pero estos movimientos pueden desarrollarse sobre diferentes superficies alabeadas de los cuerpos más conocidos (esferas, cilindros, conos, etc.) y también de otros más irregulares, lo que da lugar a hélices y helicoides, como en los ejemplos mostrados en las Figuras 4a a Figura 6. La representación matemática de esas figuras es muy conocida y puede encontrarse en cualquier tratado de geometría.



Figura 4a. Espirales en fósiles de seres que vivieron hace más de 150 millones de años. Se trata de un nautilo, una especie de cefalópodo que aún sobrevive .



Figura 4b. Exoesqueleto de un nautilo actual. El cefalópodo sobrevivió a las extinciones de 150 millones de años.



Figura 4c. Escaleras de entrada a los Museos Vaticanos: dos escaleras idénticas enroscadas, una para subir y otra para bajar sin cruzarse.

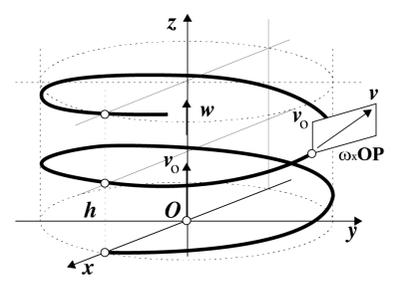


Figura 5a. Generación de una hélice sobre una superficie cilíndrica superponiendo un movimiento de rotación a una traslación en la dirección del eje.

B. PATRONES EN LA NATURALEZA QUE SIGUEN OTRAS PAUTAS

Hemos destacado la existencia de patrones relacionados con la forma geométrica pura que, en un plano (x, y), llamamos espiral. Hemos mostrado que esa forma plana es trasladable al espacio cuando cambiamos el plano por una superficie curva que tiene 3 dimensiones (3D).

La limitación que provoca la superficie sobre la que se desarrolla un patrón o forma parece restringir de manera definitiva sus posibilidades para la supervivencia en la naturaleza. Obligadas a permanecer sobre una superficie plana, las hélices se aplastan y se transforman en espirales. Este efecto podría ocurrir, por ejemplo, bajo la acción de un campo de gravedad constante que actúa sobre un plano. Pero ese mismo campo de gravedad sobre una superficie esférica como la tierra, nuevamente recupera las espirales como arrollamientos en el espacio y vuelven a ser hélices.

En particular, todos los seres vivos estamos limitados por este hecho; la Tierra es prácticamente una esfera que gira sobre su eje y tiene un campo de gravedad cuasiconstante sobre toda su superficie. Todos los movimientos estarán condicionados por ese hecho (conocido como “fuerza de Coriolis”), dado que todos los seres vivos conocidos nacemos, vivimos y morimos con esta restricción, pues habitamos en una delgada capa de unos 10 km sobre una esfera de 6500 km de radio. Si redujéramos la Tierra al tamaño de un balón de fútbol de 30 cm, lo que llamamos *biosfera* tendría el espesor de una capa de barniz. Para las dimensiones de los seres vivos, menores que una ballena azul (aproximadamente 100 m.) la esfera puede considerarse un plano con gravedad constante, pero en rotación. No debe extrañarnos entonces ver hélices y helicoides en las formas de muchos seres vivos (Thompson, 1947).

A pesar de la enorme diversidad de formas que encontramos en la naturaleza, solo unas pocas formas geométricas básicas, como las espirales, son posibles con el espacio de variables disponible y las propiedades intrínsecas de la materia. Aunque, según el “espacio geométrico” disponible, se puedan utilizar geometrías de bases muy diversas, la física subyacente a la materia agregará sus propias limitaciones a las posibilidades de supervivencia de unas formas sobre otras, un hecho que ha condicionado fuertemente la evolución sobre la Tierra.

Por ejemplo, según las propiedades térmicas o de viscosidad de los materiales que formen los límites o “condiciones de contorno” de las formas que estamos observando, si aparecen fuera de equilibrio durante el transporte de calor, pueden surgir desde sistemas de rollos convectivos más o menos paralelos (convección de Rayleigh-Bénard), cuando la fuerza de flotación (*buoyancy*) es la principal causa desestabilizante. Esos rollos son *similares* a los que se observan en la Figura 7a (que en este caso obedecen a otro tipo de inestabilidad). O bien, pueden aparecer patrones de hexágonos con más o menos defectos (convección tipo Bénard-Marangoni), cuando interviene también como causa la variación de la tensión superficial con la temperatura (Figura 7b) (Bénard, 1900; Koschmieder, 1993; Velarde y Normand, 1980; Normand, *et al.*, 1977).

Hay muchas otras fuerzas (en realidad, gradientes) que pueden impulsar la formación de este tipo de patrones. Solamente para citar algunas, pensemos en una diferencia de concentraciones en soluciones salinas o en mezclas binarias, de campos eléctricos o magnéticos, flujos en fluidos, flujos de energía (en particular, la transmisión del calor), etc.

Por la acción de diversas causas desestabilizantes como las citadas, suelen aparecer patrones similares en la naturaleza, como los rollos que se producen en las nubes por efectos del viento y la temperatura,

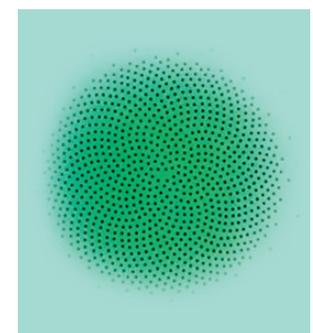


Figura 5b. Distribución espacial de semillas en un girasol: simulación numérica (tomada de Douady y Couder, 1993).

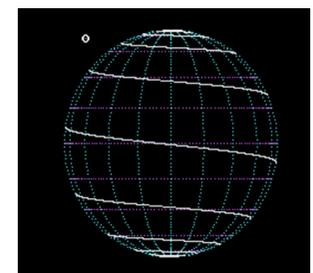


Figura 5c. Generación de una hélice asentada sobre una superficie cilíndrica superponiendo un movimiento de rotación en latitud a otra en longitud (coordenadas esféricas).

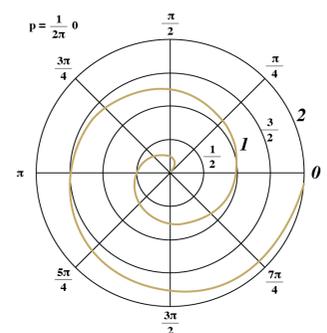


Figura 5d. Generación de una espiral típica en exoesqueletos en un plano. El radio ρ es una función del ángulo girado θ .

o las improntas de una convección de base hexagonal en el secado de salinas, que se ven en la Figura 7b.

Aunque los detalles son algo diferentes entre una convección de Rayleigh-Bénard y la de origen salino, o los rollos de convección producidos por una inestabilidad atmosférica (de Kelvin-Helmholtz) (Figura 7a), los patrones resultantes muestran muchas similitudes (Cross y Hohenberg, 1993).

En 7b (derecha) se pueden ver hexágonos en cuyos lados queda una acumulación de sal como improntas de las celdas que se formaron en lagos salados (convección termo-salina) al cesar la evaporación y la convección. Estos son procesos producidos por un calentamiento que forma esos patrones dinámicos, que también aparecen por causas cuyos detalles son algo diferentes a los mecanismos aquí citados (Koschmieder, 1993).

En procesos de fragmentación durante el enfriamiento de un fluido condensable, suelen aparecer fracturas en la fase sólida producidas por tensiones en los materiales. Estas fracturas ocurren a determinadas temperaturas, y entre otras cosas, dependen de la velocidad del enfriamiento durante el proceso. Como ejemplo de este caso, se pueden ver patrones prismáticos de base poligonal (Figura 7c). Aquí aparece una vertiente derramada en épocas pasadas por el volcán Copahue (Caviahue, Neuquén, Argentina). Con un aspecto similar, la Calzada de los Gigantes, en Irlanda, es un sitio muy famoso que permite caminar sobre lo que parece ser un empedrado hexagonal muy regular.

En la Figura 7d, vemos otro tipo de patrones proveniente de movimientos “congelados”: huellas en



Figura 7. Patrones dinámicos con distintas pautas geométricas (o sus huellas). **7a.** En desarrollo (arriba, a la izquierda). **7b.** Huellas en una salina (arriba a la derecha). **7c.** En la solidificación de lava (abajo, izquierda). **7d.** En el secado de un fondo lacustre.

fondos lacustres ahora secos, que permanecen cuando los movimientos se detienen por acción de las fuerzas de frenado viscoso que ocurren durante el secado por evaporación. Luego, un pequeño derrumbe produce un corte vertical que deja a la vista estas huellas. Un fenómeno de estratificación muy estudiado en geología (Tarbuck y Lutgens, 1999).

En patrones como estos, que reflejan movimientos ocurridos en el pasado, es posible observar y medir fenómenos que se repiten en un sistema actual con una dinámica similar, ya sea para estudiarlos como una huella de épocas pasadas, como lo hace la geología, o para reconstruir fenómenos a veces imposibles de observar por el hombre en tiempo real.

Con esas huellas podemos encontrar las causas de ese dinamismo, datarlas en la historia e incluso seguir su efecto en movimientos reales, construyendo modelos de experimentos a escala o realizando simulaciones numéricas en modelos matemáticos que reproduzcan esos movimientos con los datos que obtenemos de esos patrones “congelados” (Rabinovich *et al.*, 2000; Mancini, 2007).

C. ¿ESTÁTICO O DINÁMICO? ¿ESTABLE O INESTABLE?

En un universo en expansión nada hay absolutamente estático; todo se mueve. Se suele decir que “en el universo, lo único permanente es el cambio”. Es el *observador* quien determina a priori, según las escalas de tiempos y distancias que elige para medir, si aquellas formas que va a estudiar, se podrán modelar luego como acontecimientos estáticos o dinámicos; o entre estados de equilibrio estable, inestable, o indiferente. En todos los cursos universitarios de física básica se enseña a distinguir estos estados y a relacionarlos con fuerzas y potenciales. En algún momento de su existencia, observando a una escala determinada, todos esos patrones o formas que mostramos, han existido o existen como sistemas “fuera del equilibrio” (Nicolis y Prigogine, 1977). En esa condición pueden tener un funcionamiento ordenado (periódico o multiperódico), o bien desordenado, caótico, hipercaótico o turbulento. Dentro de la física, el estudio del comportamiento de estos sistemas es tema de la dinámica no lineal y de la mecánica estadística.

Un ejemplo de sistema que produce patrones dinámicos es el de la Figura 8 (izq.). Allí se ve una lámina de agua que cae desde un borde recto horizontal. Se trata de una fuente decorativa del Parque Yamaguchi, en Pamplona, España. Mientras el agua fluye, la lámina de agua parece tener nervaduras de fluido,



Figura 6. Exoesqueletos marinos. La naturaleza es muy creativa y en ensaya todas estas posibilidades que le permite un espacio determinado, pero solo unas pocas logran evolucionar y sobrevivir (Thompson, 1947; Stevens, 1986).

Figura 8. Patrones en distintas situaciones. (Izq.) Un patrón dinámico actual. (Centro) Un patrón estático, “huella” de un acontecimiento dinámico. (Der.) El patrón de un sistema complejo.

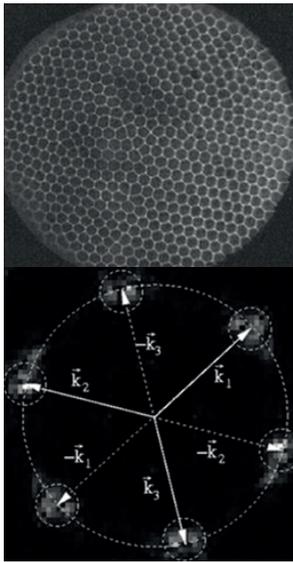


Figura 9. Un patrón asintótico típico en la convección de Bénard-Marangoni (de laboratorio), la identificación con un panel de abejas es inmediata. Abajo, Espectro espacial (K) de vectores de onda o “modos de Fourier” (Koschmieder, 1993; Mancini, 2007).

que se mueven horizontalmente cambiando de posición todo el tiempo y de manera caótica —un ejemplo clásico de la llamada inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (Cross y Hohenbergh, 1993)—. Se trata de un patrón dinámico que cambia en función del tiempo (no estacionario) y lo vemos evolucionar a tiempo real.

En la figura del centro, el agua que descendió de una superficie plana de arena por una pendiente ha formado canales por donde fluyó en mayor cantidad dejando su huella en la arena. Se trata de un patrón que ahora es “estacionario”. No cambiará en función del tiempo si no actúan otras causas (o si nuestro tiempo de observación no es demasiado largo).

A la derecha, se observa una ciudad desde lo alto, el Estado Vaticano, un “patrón” construido por la inteligencia humana y en el cual suceden muchas cosas. Dependiendo de nuestra escala espacial de observación y del tiempo que permanezcamos observando, veremos que puede considerarse un patrón estático o dinámico, según lo que se pretenda describir. Podríamos decir lo mismo de la fotografía de un circuito integrado.

Hemos resaltado que en un universo en expansión no hay nada en equilibrio y, en consecuencia, tampoco habrá estados “absolutos” de equilibrio. Por ello, si observamos un patrón de un sistema fuera de equilibrio durante un cierto tiempo (definido por el observador) y no ocurren cambios, el estado puede considerarse como “cuasiestacionario” durante el tiempo de observación, al menos como una primera aproximación.

Si en igualdad de todos los parámetros, reiniciando el sistema varias veces, la forma se repite, podemos agregar que se trata de un “estado asintótico”, propio de ese sistema en esas condiciones. La cuestión siguiente será considerar cuán estable es este “estado” de cuasiequilibrio (o, lo que es igual, especificar cuál será su “vida media”, el tiempo que permanece manteniendo esa forma).

La estabilidad de un estado se define estableciendo cuánto de robusto es frente a perturbaciones. Para medirlo, podemos introducir perturbaciones con diferente amplitud y, luego de quitarlas rápidamente, medir el tiempo que tarda el sistema para retornar a lo que hemos observado antes. Si siempre se trata del mismo patrón, lo consideraremos como “estado asintótico”, que tiene un tiempo de relajación característico del sistema.

La existencia de estados asintóticos y dimensiones características en sistemas fuera del equilibrio (longitud de correlación y tiempo de relajación) fue demostrada experimentalmente hace muchos años. Mediante experimentos se comprobó que, si se inicia un sistema induciendo una condición inicial diferente a la dimensión característica que tendría asintóticamente (a tiempo infinito), el sistema evolucionará espontáneamente a ella. Por ejemplo, induciendo térmicamente la impronta de una forma semejante a la que aparece asintóticamente, pero de un tamaño mayor o menor, al quitar la perturbación el sistema libremente sufrirá una relajación hasta la medida de la forma que corresponde a esa dimensión característica (Cerisier *et al.*, 1987).

D. CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

Ejemplo 1. Datos de un sencillo experimento con radiación solar. Las manchas solares

La propagación de la radiación electromagnética (em) es un tema de electromagnetismo que suele complicarse mucho cuando ocurre en la materia y a veces requiere un tratamiento cuántico o al menos semiclásico. Por ello, por ejemplo dentro de la óptica electromagnética, se recurre a tratamientos simplificados, como la “óptica geométrica”. Ha sido frecuente también la realización de modelos dinámicos en un espacio construido con variables *ad hoc*, que nos interesa relacionar.

Un ejemplo sencillo es el siguiente: observando una imagen del Sol en el plano imagen de un sistema óptico, podemos ver un disco iluminado en un plano bidimensional (x, y) con una distribución interna de luz $I(x, y, t)$, donde se pueden observar las explosiones o “manchas solares”, como aparece en la Figura

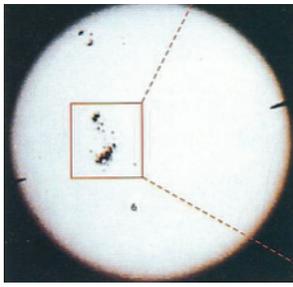


Figura 10 a. Imagen del Sol con "manchas solares".

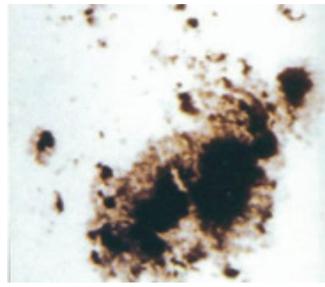


Figura 10 b. "Manchas solares" (detalle de la zona señalada en la Fig. 10a).

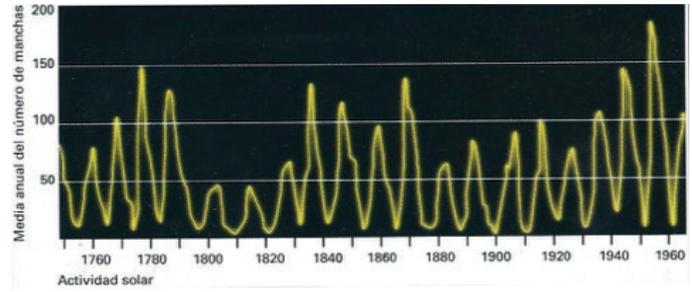


Figura 10 c. Diagrama de intensidad total I, vs. Tiempo t.

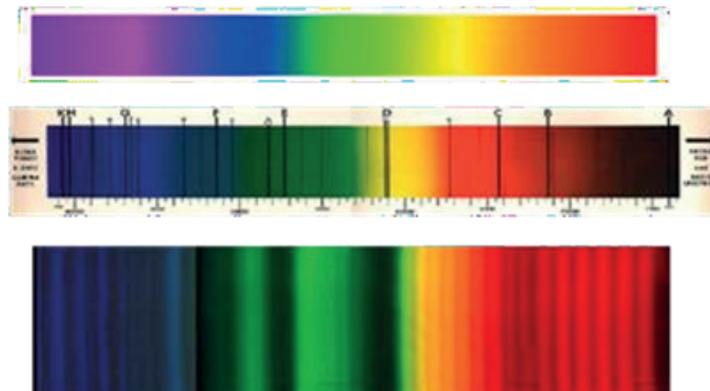
10a. Se distinguen claramente el disco, la corona solar con explosiones alrededor del disco central y unas manchas interiores de color más oscuro. En la Figura 10b, se ha aislado la zona de las manchas más oscuras, como un detalle amplificado.

En la Figura 10c, aparece el patrón de las intensidades totales recibidas por un detector en función del tiempo. Se trata de una medida de la evolución en el tiempo de la radiación mostrada en 10a, en la que aparece el famoso "cuasiperíodo" de ciclos solares repitiéndose cada once años .

Con estos datos, ya tenemos todos los ingredientes para construir un modelo dinámico. Si integráramos toda la intensidad sumándola en un detector, y midiéramos su salida en función del tiempo, observaríamos una figura de variación de la intensidad total en función del tiempo, como la Figura 10b (*El Universo. Enciclopedia de la Astronomía y el Espacio*, 2004). Con estos datos ya se puede construir un modelo dinámico que permita reconstruir matemáticamente el patrón que se ve en esa figura.

Por otro lado, la radiación estará formada por distintas frecuencias o longitudes de onda (espectro) que vemos como colores (Figura 11). Si la distribución fuera continua, como en el espectro de más arriba, tenemos herramientas como la ley de Planck para relacionarla con otras variables, por ejemplo, la temperatura de la superficie emisora. Si fuera una emisión discreta en longitudes de onda o frecuencias, formaría un conjunto de líneas de diferentes colores, por lo que debemos recurrir a la teoría atómica para poder describir sus causas. Pero siempre será posible incorporar las causas y las distribuciones obtenidas en un plano de variables elegidas previamente.

Figura 11. Patrones de radiación electromagnética en un eje de frecuencias (o longitudes de onda). Arriba: espectro de emisión de una fuente incandescente. En el medio: espectro solar de emisión, con las líneas de absorción de la atmósfera indicadas en negro. Abajo: Espectro de bandas de emisión de una molécula diatómica típica (H₂,N₂,...).



En la Figura 11 se observa el espectro electromagnético, donde aparecen con la misma altura en vertical la distribución de intensidades en función de la longitud de onda (color) eje horizontal. El espectro continuo de arriba no es más que la distribución de colores del arco iris que observamos a simple vista, luego de una tormenta. Está relacionado con la temperatura

del cuerpo que emite la radiación por la ley de Kirchhoff-Planck (Feynman *et al.*, 1964). El conocimiento dinámico de estas variables ha permitido, entre otras cosas, conocer cómo evolucionó la temperatura del universo desde la "gran explosión" (Big Bang) (Gamow, 1949) o permitió descubrir la fuga de las galaxias (Hubble, 1949) y con ella medir la expansión del universo (Penzias y Wilson, 1965).

En el espectro del medio, aparecen en negro las bandas y líneas de absorción de los gases de nuestra atmósfera (líneas de Fraunhofer). Entre ellas, las de los gases del "efecto invernadero". El último espectro muestra cómo es un espectro de moléculas sencillas en una descarga a baja presión (*El Universo. Enciclopedia de la Astronomía y el Espacio*, 2004).

Con estos datos podemos construir modelos dinámicos *ad hoc*, reduciendo al mínimo las variables relevantes para aquello que se desea explicar. Por lo general se procura escribir las ecuaciones del sistema con variables que se puedan medir u observar simultáneamente en función del tiempo, para construir el llamado "espacio de las fases del sistema". En función de las variables elegidas cambiarán los patrones y su modelo matemático.

Ejemplo 2. Obtención de un modelo espacio-temporal unidimensional $F(x,t)$, partiendo de datos obtenidos en un experimento sencillo.

Si en la Figura (izq.) ilumináramos por transparencia, con un haz de luz horizontal, un plano luminoso que corte la película de agua, como en la Figura 12 (en amarillo), y filmáramos una imagen de la línea iluminada (por ejemplo, cada segundo), tendríamos una línea de píxeles con una distribución de intensidades de luz y podríamos seguir su evolución en función del tiempo construyendo un diagrama como el que se muestra en la parte inferior de la Figura 12.

En las zonas donde la capa de agua es más gruesa, se producirá un efecto de enfoque de la luz, ya que el agua actuará como una lente que aumentará la intensidad en ese lugar, marcando la posición de las nervaduras. Si esa posición permaneciera fija, la intensidad en cada punto no cambiaría. Repitiendo el barrido de esa línea cada cierto tiempo, tendremos una imagen de la posición x en el eje horizontal en función del tiempo $x(t)$. Utilizando para la posición un eje horizontal x , y en el eje vertical el tiempo, podemos medir los movimientos, las nervaduras $x(t)$ y sus velocidades

Para las nervaduras en posiciones fijas, encontraríamos un patrón correspondiente a líneas paralelas y su velocidad sería 0. Si la posición cambiara en función del tiempo, como ocurre en este caso, líneas paralelas inclinadas a derecha o izquierda, con una inclinación proporcional a la velocidad de desplazamiento horizontal de las nervaduras.

Con estos pocos elementos y estas sencillas construcciones espacio-temporales (en este caso medimos una sola variable espacial, la posición de varios puntos en un eje horizontal), ya es posible construir

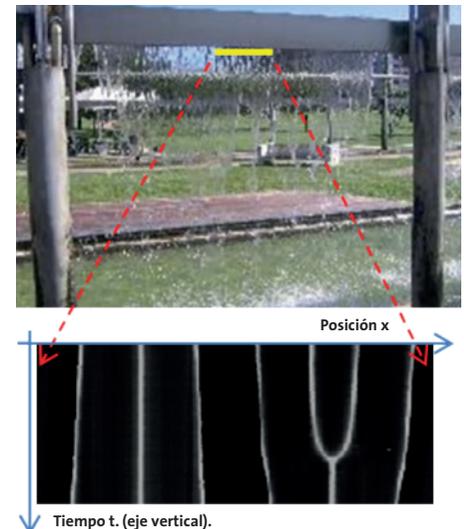


Figura 12. Obtención experimental por medios ópticos, de datos de espacio-tiempo $x(t) = f(t)$, a fin de construir un sencillo modelo dinámico y verificar sus resultados en el experimento.

un primer modelo dinámico unidimensional que nos dé la posición de los engrosamientos del líquido en función del tiempo, al que luego podremos incorporar otros parámetros y variables para representar las causas de ese movimiento y, por ejemplo, estudiar la aparición de “defectos” (fuentes o sumideros).

Ejemplo 3. Celdas de Bénard-Marangoni

Otro sencillo experimento donde se pueden obtener patrones hexagonales y de otros tipos consiste en repetir la experiencia de Bénard (1900). Para ello, utilizamos una capa de aceite de 5 a 10 mm de profundidad, en un recipiente cilíndrico horizontal de unos 10 cm de diámetro. Se calienta desde abajo, lo que permite a la superficie superior transferir libremente a la atmósfera el calor que recibe, por lo cual la superficie superior siempre estará algo más fría.

La parte inferior, más caliente, será menos densa y tenderá a ascender. El peso del fluido más frío y denso tenderá a evitarlo. Si aumenta la cantidad de calor suministrado, a partir de un valor umbral en el que ambas fuerzas se igualan, el aumento de fuerza de flotación hace que el fluido entre en movimiento, ascendiendo en algunos lugares más calientes y descendiendo el fluido más frío en otras zonas. Así se forman las celdas convectivas y asintóticamente se obtiene la formación de una estructura regular, compuesta fundamentalmente por un patrón de celdas hexagonales con fluido que asciende por el centro y desciende por las paredes de cada celda individual de base hexagonal.

Visto desde arriba (si no calentamos demasiado y mantenemos constantes todos los parámetros del experimento) podemos visualizar el flujo en cada celda, agregando polvo de aluminio en suspensión o, mejor, mediante procedimientos ópticos específicos como la ombroscopía (Koschmieder, 1993). En la Figura 13 se observan los resultados de un experimento de convección de Bénard-Marangoni, visto desde arriba.

Durante el encendido del experimento, el fluido a partir del umbral de convección sufre un proceso transitorio de formación de la estructura, cuyo resultado final será el patrón asintótico, con la misma dimensión característica para cada celda (hexágonos con el mismo tamaño medio). La Figura 13 (arriba) muestra 6 etapas transitorias durante este proceso de formación y debajo la figura asintótica.

Aumentando lo suficiente el parámetro de control del experimento (que en este caso es la cantidad de calor suministrada desde abajo (o el gradiente de temperaturas aplicado entre el fondo y la superficie) se puede observar que este patrón, inicialmente ordenado y estacionario, con una cierta cantidad de celdas defectuosas (respecto de un ordenamiento hexagonal ideal), comienza a aumentar el número de defectos, y estos, a su vez, comienzan a ser dependientes del tiempo en algunas zonas, hasta que, por fin,

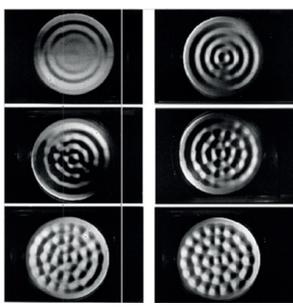
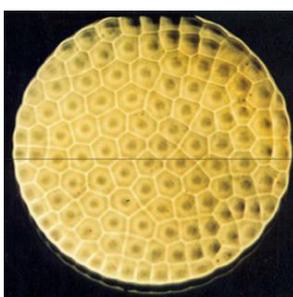


Figura 13. Arriba. Observación de un patrón hexagonal durante su formación a partir de anillos concéntricos (observados por ombroscopía). Abajo. Figura asintótica observada por contraste de fase.



el patrón se desordena completamente y el transporte de calor se vuelve turbulento (el líquido “hierve”).

Un experimento como este proporciona un banco de pruebas para estudiar, en función de un “parámetro de control” (en este caso, la temperatura), todo tipo de comportamientos dinámicos, desde la formación de patrones estacionarios a aquellos dependientes del tiempo (oscilatorios), caóticos, desde caos temporal a movimientos de caos espacio-temporal, luego preturbulentos hasta llegar a turbulencia completamente desarrollada.

Sus variables físicas dependientes del tiempo (el campo de temperaturas y el de velocidades) acompañan las correspondientes variaciones en el patrón. Por ello, los problemas de convección han sido considerados experimentos paradigmáticos. Junto con los láseres y la óptica cuántica, se han utilizado para validar diferentes estudios teóricos en dinámica no lineal, en los que necesariamente aparecen sistemas de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (PDE) acopladas. Sistemas que normalmente son muy difíciles de resolver sin realizar aproximaciones.

Cuando solo interesa la evolución en función del tiempo de una variable cualquiera, esas PDE se pueden reducir a un “modelo dinámico”, con un parámetro de control. Con esto se logra un sistema dinámico representable con un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE), mucho más sencillo de resolver.

2. TAMAÑO Y FORMA

A. DIMENSIONES CARACTERÍSTICAS Y ESCALAS

Si quisiéramos saber con detalle cómo es el movimiento del aceite en el interior de una sola celda, nos convendría observar una celda con el mayor tamaño posible y utilizar un modelo matemático con que resolver las ecuaciones PDE aproximadas mediante el método conocido como “ecuaciones de amplitud” para los diferentes modos que intervienen en el movimiento, y comparar los resultados con el experimento.

En ese caso, el máximo sería obtener, para un recipiente experimental dado, la celda hexagonal del mayor tamaño posible para poder comparar los campos de velocidad y temperatura en su interior en un experimento. Ese valor referido a una celda más pequeña nos daría el máximo aumento posible de lograr en un experimento que permita comparar a otra escala.

En la Figura 14, vemos un aumento de escala en un recipiente cilíndrico como el de la figura anterior. Un hexágono ocupa todo el centro de la imagen compatible con el contenedor. Es el máximo tamaño al que podemos ampliar esa celda sin destruir su forma o que una forma dependiente del tiempo pase a ocupar su lugar. Para que la forma hexagonal sea estable, debe completarse con medios hexágonos hasta llenar el recipiente.

En el ejemplo de la Figura 14 vemos que las condiciones de contorno ponen un límite al máximo tamaño que podemos alcanzar. Pero hasta aquí no tenemos evidencia de que sea una limitación debida a una propiedad física o geométrica lo que impide que esa forma crezca. Mientras se disponga de un recipiente que permita rodear al hexágono de medios hexágonos (medio porque se ajusta espontáneamente a la forma exterior del contenedor rodeando al hexágono central), la forma central se mantendrá (geométricamente) semejante a un hexágono como los de la Figura 9, que siempre están rodeados por otros.

Cuando el recipiente no lo permite porque, por ejemplo, aumentamos la profundidad de la capa de fluido, desaparece la última partición radial de las que se ven en las Figuras 9 y 13. Durante el transitorio de formación, solo quedan las particiones azimutales, que suelen verse desde 1, a máxima profundidad de fluido (mínima relación de aspecto) hasta un máximo de 6/8 particiones.

La zona sin particiones radiales se conoce como pequeña relación de aspecto (SAR) (Figura 15). En Koschmieder (1993) y Mancini (2007), se pueden encontrar detalles sobre las regiones de estabilidad y los “modos” que aparecen en cada caso. Los modos de SAR no son “modos de Fourier”, como ocurre en gran relación de aspecto (LAR) (en el límite: una capa infinita de profundidad constante sobre un plano). Lo son en el sentido que Rosemblat, Homsy y Davis les dieron en pequeña relación de aspecto, identificándolos con dos números naturales que indican el número de particiones radiales (r) y azimutales (q) que aparecen (Koschmieder, 1993; Kane y Sternheim, 1991).

La relación de aspecto “intermedia” comienza cuando aparece la primera partición radial o modo (1,0). La relación de aspecto se considera grande (LAR) cuando un pequeño cambio en las condiciones de contorno no influye notoriamente en el patrón obtenido, sobre todo en la zona central.

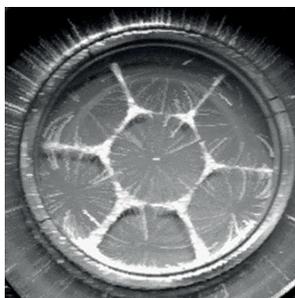


Figura 14. Máxima ampliación experimental posible de un hexágono en el mismo recipiente anterior.²

² El recipiente del experimento está rodeado por otro exterior que contiene el mismo fluido, de manera tal que el interior tiene sus paredes laterales a la misma temperatura en todo su perímetro para evitar el flujo lateral de calor. Se pueden ver las líneas de flujo con la ayuda de partículas de aluminio muy livianas que viajan con el flujo (*flakes*). El hexágono central, tiene aproximadamente la misma dimensión característica que los 6 medios hexágonos ocupando el resto del contenedor. Esta figura sólo ocurre en un contenedor de un diámetro D , para una profundidad de capa de fluido d determinada (una relación de aspectos $\Gamma = D/d$).

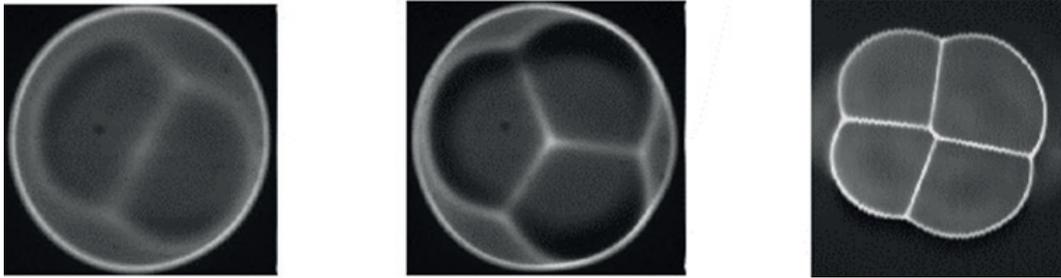


Figura 15. Convección en relación de aspecto intermedia entre un sistema de pequeña relación de aspecto (SAR) y uno extenso (LAR). Se muestran los modos (en el sentido de Roseblat, Homsy), donde dos números indican las particiones radiales y azimutales (r, q), respectivamente. En relación de aspecto intermedia, los modos pueden considerarse como la sumarse de 2 “modos simples” (uno con $r = 0$ y otro con $q = 0$). El radial (contorno exterior, $r=1, p = 0$) y el azimutal ($r = 0$ y $q = 1, 2, 3, \dots$) representativo del número de celdas convectivas en que se divide el interior del modo radial.

B. DIMENSIÓN CARACTERÍSTICA Y PROPORCIONES

El conocimiento de la influencia de distintos parámetros como la relación de aspecto (AR), ($G = D/d$) ($G = \text{dimensión horizontal/profundidad de la capa}$) marcada por el tamaño del recipiente y la profundidad de la capa, junto con las propiedades térmicas y de flujo, han permitido obtener reglas para escalar hasta obtener un solo hexágono (Figura 14) como una estructura asintótica en todo el recipiente o clasificar estructuras con otras condiciones de contorno.

Además de la forma, hay otras propiedades que se mantienen entre figuras semejantes; conocerlas simplifica mucho algunos cálculos. Por ejemplo, si cambiamos de tamaño un cuadrado de lado l, sabemos que otro elemento de su simetría, como una diagonal, valdrá siempre $\sqrt{2} l$. Conociendo el cambio de escala sufrido por la dimensión característica l, es inmediato calcular las demás relaciones. Se puede ver en la Figura 16 cómo, sin interesar demasiado cuál es la forma inicial, podemos estimar que todas las figuras planas semejantes aumentan su área en un factor proporcional a una dimensión característica al cuadrado.

Si tomamos esa dimensión como referencia (puede ser el valor de un lado, una altura, etc.), existirá una relación definida entre el todo y las partes y podremos extraer conclusiones. En seres vivos, por ejemplo, en un animal de una especie dada, un órgano estructural como un hueso principal, mantendrá siempre una cierta relación definida con el tamaño total y, comparando esos huesos, podemos establecer comparaciones entre las alturas, aunque esos animales se hayan extinguido.

C. SEMEJANZA GEOMÉTRICA Y SEMEJANZA ELÁSTICA

Si tenemos una figura y queremos construir otra que, manteniendo su aspecto cambie su tamaño (Figura 16), la geometría nos enseña que se debe multiplicar cada dimensión relevante por el mismo factor de amplificación o de escala y mantener constante el valor de los ángulos. Procediendo así, se obtiene otra figura que mantendrá el aspecto inicial. Decimos entonces que las figuras guardan semejanza “geométrica”, cuyos principios se conocen desde Euclides (Kane y Sternheim, 1991).

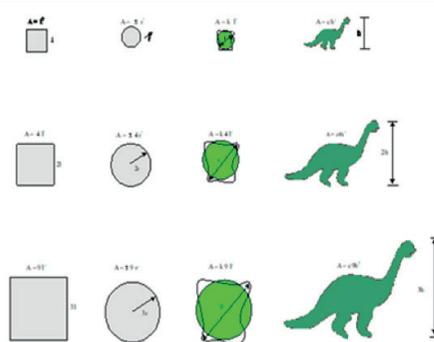


Figura 16. En figuras planas geométricamente semejantes, la superficie siempre es proporcional al cuadrado de la dimensión característica independientemente de la forma (ejemplos: cuadrado, círculo). Una forma irregular siempre será asimilable a una regular con la misma superficie total.

Esta operación, que durante siglos alimentó la literatura fantástica infantil desde Gulliver, es imposible de realizar cuando aparece alguna propiedad del espacio que lo impide, o una propiedad constitutiva de la materia, como pueden ser, por ejemplo, sus constantes elásticas (el módulo de Young en sólidos, el módulo de torsión σ , en fluidos, la viscosidad o la tensión superficial).

Hay propiedades de la materia que se relacionan con una misma dimensión característica pero que impiden establecer una semejanza geométrica porque afectan de manera distinta a otras dimensiones y limitan los tamaños alcanzables. Esto puede verse en el ejemplo siguiente, que se conoce desde la época de Galileo Galilei y se le suele atribuir.

Supongamos un cubo de masa m y volumen V proporcional a una dimensión l^3 , que cuelga de una barra de radio r y longitud l, formando un péndulo en reposo. El péndulo estará en equilibrio en su posición central. Si imaginamos que se mantiene una relación lineal entre l y r, ($l = k.r$), mantenemos la semejanza geométrica. Entonces la superficie de la sección transversal de la barra será proporcional a r^2 y, si la proporción es lineal, la semejanza geométrica será igualmente proporcional a l^2 , ya que $l = k.r$.

Escalando todas las medidas al doble de su valor, l y r pasarán al doble, la sección transversal de la barra crecerá como l^2 , o sea, un factor 4, mientras que el volumen crecerá como l^3 , un factor 8. La tensión de la barra, que es el peso por unidad de superficie que lo soporta, habrá aumentado un factor 2, ya que $P/S = k (l^3 / l^2) = k.l$. Es decir, esta relación peso/superficie seguirá aumentando a escalas mayores.

Imaginemos, por ejemplo, que ese modelo representa una manzana colgando de un árbol, mientras crece de tamaño. Pasado un cierto valor de su peso, el pedúnculo que la sostiene acabará por romperse y la manzana caerá. Es decir, los frutos alcanzarán un determinado tamaño máximo y luego caerán al piso por su propio peso, ya que la sección transversal del pedúnculo crecerá con l^2 y el peso con el volumen, es decir con l^3 . Ocurre con todos los frutos cuyo peso crece más rápidamente de lo que lo hace su unión al tronco de soporte.

En el factor de proporcionalidad está de por medio una propiedad elástica del pedúnculo (barra o cuerda) que sostiene el peso, el módulo de Young del material que lo constituye. El material fijará con su valor un límite de tensión admisible para la barra. Si queremos aumentar de tamaño y que la barra no se rompa, debemos mantener la tensión elástica en la cuerda o barra, por debajo del valor de tensión admisible máxima para ese material (que será proporcional módulo de Young).

Para resolver el problema elástico, si queremos escalar nuestro sistema a uno más grande (o más chico), necesitamos analizar cómo varía la tensión en la barra con la dimensión característica:

La relación es muy sencilla: para que la barra no se rompa, la tensión s :

$$\sigma < \sigma_{ADM}$$

La tensión en la barra σ depende del peso y de la sección transversal A de la barra.

($P = T$, tensión en la barra):

$$\sigma = T / A = mg / l^2 = \rho g V / l^2 = \rho g l^3 / l^2 = \rho g l$$

$$\sigma = \rho g l$$

Si la tensión s en barra de sostén fuera independiente de l , nada nos impediría utilizar las proporciones geométricas para aumentar las dimensiones. Pero como la tensión crece con la dimensión l , la barra acabará cortándose.

Para escalar un patrón de este tipo necesitamos una semejanza que tenga en cuenta este hecho. Este ejemplo clásico no hace más que destacar que la elasticidad de los materiales fija un límite para el crecimiento del tamaño de una forma determinada. Ocurre lo mismo para un esfuerzo de compresión.

Este ejemplo, donde interviene una propiedad elástica, nos permite ver que esas películas de ciencia ficción donde, por ejemplo, algunos insectos crecen manteniendo una forma geométrica semejante hasta multiplicar su tamaño por una cifra arbitraria suelen ser completamente irreales. Por ejemplo, las patas de una mosca aumentada, digamos por 100 000, probablemente acabarían rompiéndose, porque el peso de la mosca crecerá con el volumen, es decir con l^3 , y la sección de la pata con l^2 . Es decir, antes de afirmar algo, habría que verificar si el valor de la tensión admisible para esa amplificación ha sido superado o no.

Muchas relaciones del tipo citado se pueden establecer entre seres vivos de la misma especie e incluso entre especies distintas si estamos en condiciones de afirmar más cosas, como por ejemplo, que la densidad media de los tejidos entre animales de una misma especie es la misma. Esta limitación requiere encontrar una *semejanza elástica*, lo que significa que algunas dimensiones deben crecer de manera diferente de otras.

Estableciendo su relación, podríamos entonces comparar animales de distintos tamaños y obtener conclusiones de muchos tipos, en particular, hallar la relación entre una longitud característica l y la masa, o entre el consumo de alimentos y la masa de los animales (Figura 18).

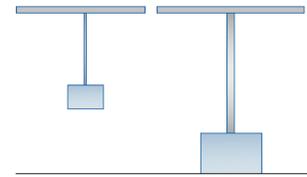


Figura 17a. "Problema de Galileo". Una barra de radio r longitud l que soporta un peso colgado trabaja a la tracción. A su derecha, aumento de escala con semejanza geométrica ($l = k.r$).

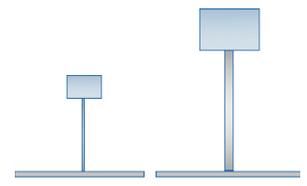


Figura 17b. "Problema inverso". Una barra que soporta un peso desde arriba trabaja a la compresión si la altura $l < 15r$. Si $l > 15r$, (aproximadamente), se agrega el esfuerzo por la flexión lateral (pandeo), que tiende a curvar la barra. A su derecha, aumento de escala con semejanza geométrica.

Desde el punto de vista de la biología, es posible establecer diferentes proporciones que relacionen variables biológicas estáticas (o dinámicas) y obtener una capacidad de *predicción estadística* sobre el comportamiento de esas variables. Según sean estas relaciones, las proporciones se clasificarán en grupos como *isometría* y *alometría*, en alusión al mantenimiento o no de la semejanza geométrica y el uso de una sola dimensión característica. También en función de la aplicación dentro de la biología se suelen clasificar en campos, como estática, ontogénica o evolutiva, según dónde es aplicada.

Pero la aplicación de las relaciones de escala no se limita a problemas biológicos. Acabamos de ver una proporción elástica. Podemos establecer, prácticamente dentro de toda la ciencia experimental, este tipo de relaciones y presentaremos algunos ejemplos.

D. PROPORCIONES ISOMÉTRICAS Y ALOMÉTRICAS. EJEMPLOS

Con la información anterior ya estamos preparados para buscar relaciones que puedan ser de utilidad dentro de cualquier ámbito de la ciencia, en particular, dentro de la biología comparada.

Normalmente, resulta más sencillo pesar un animal que medir la superficie de su cuero o su tasa metabólica. Si quisiéramos conocer cómo cambia la tasa metabólica en función de la masa de un animal determinado, deberíamos establecer, en primer lugar, la relación existente entre la masa y esa dimensión característica. Recordando que la densidad ρ relaciona el volumen y la masa:

$$m = \rho V \propto \rho l^3$$

Si la densidad media es la misma para todos los animales de un determinado grupo (por ejemplo, los mamíferos), podemos escribir la proporción:

$$l \propto m^{1/3} = m^{0.33}$$

Una longitud característica (por ejemplo, el largo del fémur), para un mamífero cualquiera, resultaría proporcional a la raíz cúbica de la masa.

Esta sencilla ley de escala nos permitirá establecer de inmediato las proporciones:

$$A \propto l^2 \quad (a)$$

$$V \propto l^3 \quad (b)$$

$$\text{Por consiguiente,} \quad l \propto m^{1/3} = m^{0.33} \quad (c)$$

A partir de las relaciones anteriores, podemos sacar otras conclusiones.

Por ejemplo, combinando (a) y (c) obtenemos que:

$$A \propto m^{2/3} = m^{0.66}$$

Entre animales de una determinada especie, se espera que una superficie dada (por ejemplo, el área del cuero o la superficie del pulmón) crezca como la masa del animal a la potencia dos tercios.

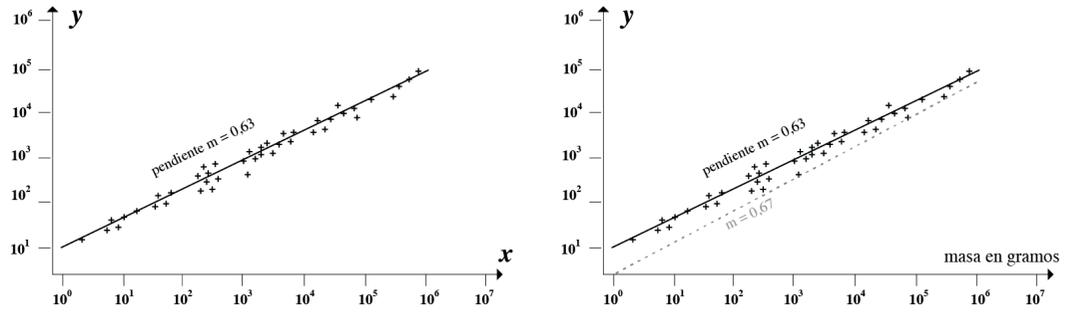
Con estos conocimientos podemos obtener conclusiones, incluso sobre variables funcionales, sin necesidad de matar al animal o, aún más, lograr hacer predicciones cualitativas sobre especies ya extinguidas, si esas propiedades a estudiar, como en este caso, dependen de variables geométricas.

Luego deberán llevarse a cabo experimentos que permitan controlar si la sencilla ley de escala que estamos utilizando se cumple o no. El tipo de experimentos a realizar responde al esquema que se detalla a continuación.

Se elige un par de variables (x, y) que se desean estudiar (por ejemplo, altura de árboles en función del radio de su tronco, el consumo de calorías en función de la masa de un animal, la longitud del salto en función del largo de su fémur, etc.).

Figura 18a. (izq.) Datos “experimentales” (hipotéticos) de una variable $y = f(x)$ en un diagrama logaritmo-logaritmo. Cada punto corresponde a una medida experimental y la recta que mejor ajusta se obtiene mediante regresión estadística.

Figura 18.b. (der.) Área del cuerpo de diferentes mamíferos en función de su masa ($A = f(m)$).



Una vez seleccionadas las variables, formular una ley de escala es tratar de establecer entre ellas una ley de potencias, considerando a una de ellas como variable dependiente. Esta ley será una expresión del tipo:

$$y = a x^m \tag{5}$$

Donde el coeficiente a y el exponente m deberán determinarse experimentalmente. Esta ley incluye como caso particular $m=1$ (cuando basta una sola dimensión para caracterizar las relaciones entre partes o entre las partes y el todo). Es lo que hemos denominado proporciones isométricas o con “ semejanza geométrica”. Pero el caso más general es para un valor de m diferente de 1.

La representación cartesiana natural para funciones potenciales es la logarítmica-logarítmica, que aplicada a una expresión como (5) nos da la ecuación de una recta para dos nuevas variables :

X e Y .

$$\log y = m \cdot \log x + c \quad \text{Haciendo:} \quad \log y = Y$$

$$\log x = X$$

$$Y = mX + C \tag{6}$$

La pendiente m se puede obtener experimentalmente ajustando al mejor valor estadístico entre una serie de medidas, que aparecen como los puntos en la Figura 19.

Podemos aplicar las conclusiones anteriores, derivadas de esquemas geométricos, a variables de tipo funcional. Los siguientes ejemplos permiten aclarar el razonamiento propuesto.

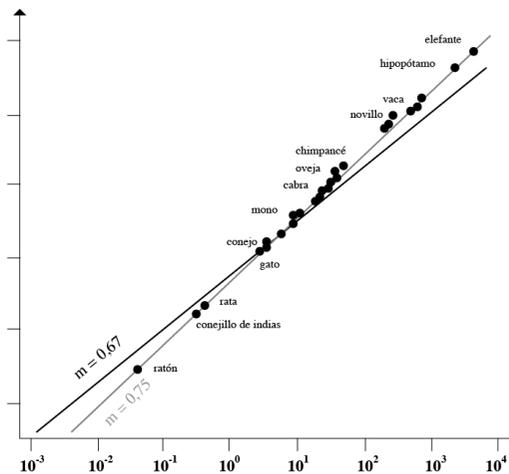
Si suponemos, a partir de argumentos de otro tipo, por ejemplo, fisiológicos, que la tasa o ritmo metabólico (RM) crece en función

de la superficie pulmonar, podemos comparar esa cifra en distintos animales y verificar cómo cambia el RM con la masa. Considerar que el RM crece con la superficie del pulmón parece una hipótesis razonable, ya que la tasa metabólica requiere consumir oxígeno, cuya absorción se produce a través de la pared pulmonar. A mayor superficie de absorción, mayor cantidad de oxígeno absorbido. La superficie del pulmón será una fracción de la superficie total A del cuerpo y será proporcional a l^2 . Si pudiéramos medir y verificar cómo crece la superficie de un animal con su masa, entonces podríamos establecer cómo crecerá la tasa metabólica con la masa.

A su vez, esto nos permitiría luego hacer predicciones sobre la cantidad de alimento que necesitará un animal en función de su masa. Si es herbívoro, podríamos estimar qué superficie de hierba necesita para alimentarse, o qué dispersión geográfica (estimada) puede tener una determinada familia, etc.

Para aclarar estos conceptos, calcularemos primero el ritmo metabólico, del cual hay *datos experimentales* desde 1932, que fueron denominados “ley de Kleiber” (McMahon y Bonner, 1983).

Figura 19. Ritmo metabólico (RM) de mamíferos en función de su masa. La recta de exponente $m=2/3=0,66$, aparece para comparar con los datos experimentales ($m=0,75$). (Redibujadas a partir de T. McMahon, Science, pp. 179-201, 1973).



Considerando la ley de escala con una sola dimensión característica, el ritmo metabólico, con ese modelo, también debería ser proporcional (“ α ”) a:

$$RM \propto A \propto m^{2/3} = m^{0.66}$$

Es decir, al igual que la superficie total, el RM también será proporcional a la potencia 2/3 de la masa. Como también hay datos experimentales sobre las calorías consumidas por día (Q), que, según lo dicho anteriormente, en principio, podemos considerar proporcionales al área de la superficie pulmonar que absorbe el oxígeno, es decir, debería presentar la misma dependencia del exponente 2/3.

$$Q \propto A \propto m^{2/3} = m^{0.66}$$

Sin embargo, las medidas de la Figura 19 muestran un mejor ajuste con dos exponentes distintos: 2/3 = 0,66 para el área y 3/4 = 0,75 para el ritmo metabólico.

¿Dónde hemos cometido el error? Repetimos que la versión más sencilla de ley de escala supone que todas las dimensiones del cuerpo de los animales crecerán en la misma proporción, sin variar la relación entre el todo y las partes. Por lo tanto, cualquier superficie debería variar como $m^{0.667}$ y, en particular, la superficie de los pulmones (donde se produce la absorción de oxígeno).

Como se puede ver en la figura, la recta que mejor ajusta los puntos tiene pendiente $m = 0,63$, que, si bien no es el valor exacto, se aproxima bastante. La recta de pendiente $m = 0,67$ ($m=2/3$) se muestra para comparar.

Si la hipótesis de absorción de oxígeno utilizada fuera correcta, los datos de la Figura 19b. deberían ser ajustados mediante una recta de pendiente igual, cosa que no ocurre. El error en la segunda curva aumentó de $m = 0,667$ (2/3) a, $m = 0,75$ (3/4).

Este “fallo” en el ajuste con la ley de Kleiber (en origen una ley experimental) llevó a revisar las hipótesis utilizadas en el cálculo. En primer lugar, sobre el tipo de ley de escala utilizado y, en segundo lugar, como veremos, en algunos factores que intervienen en el cálculo de la potencia muscular.

E. PROPORCIONES ALOMÉTRICAS

Si consideramos que una dimensión no basta para caracterizar a un cuerpo, porque tiene otra dimensión que no crece con la misma velocidad, el primer paso es establecer un modelo con dos dimensiones características relacionadas. Como veremos, en estos casos las leyes de escala se modifican. Una primera complicación consiste en establecer una relación entre una dimensión preferente, por ejemplo, la altura l , y otra, una dimensión característica de la base r .

Decir que no crecen con la misma tasa equivale a establecer una “forma” básica, que no crece igual en todas las direcciones. En este caso utilizaremos la forma cilíndrica para suponer que *la geometría se modifica* manteniendo esa proporción alométrica con un valor de m diferente de 1.

Cuando hay una dirección privilegiada de crecimiento respecto de otras dos, se obtiene la que la altura l guarda con la dimensión característica de la relación (l proporcional a r^m). En la semejanza elástica:

$$l \propto r^{2/3} = r^{0.66}$$

o bien, considerando las inversas:

$$r \propto l^{3/2} = r^{1.5}$$

Tomando en cuenta esta relación entre l y r , podemos recalculer ahora las proporciones para la masa, el área y el volumen, y volver a compararlos con los resultados experimentales anteriores.

Considerando (1 y 2), el volumen para un cilindro genérico:

$$V \propto r^2 \cdot l = r^2 \cdot r^{2/3} = r^{8/3}$$

o también,

$$V \propto l^{(3/2)^2} \cdot l = l^3 \cdot l = l^4$$

De donde la masa m será también proporcional a l^4 y, por lo tanto:

$$l \propto m^{1/4}$$

a partir de la relación básica $l \propto r^{2/3}$ y la anterior obtenemos que:

$$r^{2/3} \propto m^{1/4}$$

En síntesis:

$$r \propto m^{3/8}$$

$$l \propto m^{1/4}$$

Notemos que hay una diferencia neta en los exponentes con las relaciones (3) que obtuvimos mediante la ley de escala "sencilla" o de semejanza geométrica. Podemos ahora volver a las dimensiones relacionadas con las curvas experimentales:

Como es un cilindro, habrá dos tipos de superficie. La superficie de intercambio de calor será la superficie lateral del cilindro:

$$A = 2 \pi r l \propto m^{3/8} \cdot m^{1/4} = m^{5/8}$$

$$A \propto m^{5/8} = m^{0,625}$$

Este valor de exponente: $m = 0,625$ ajusta muy bien a las curvas experimentales de la Figura 19b, mucho mejor que el valor de $0,67$ que obteníamos anteriormente.

Sin embargo, cuando volvemos a calcular el RM o el Q, el ajuste es peor que antes. El valor de $m = 0,625$ está más alejado del valor medido ($m = 0,75$) que nuestro cálculo anterior. Necesitamos revisar las hipótesis realizadas.

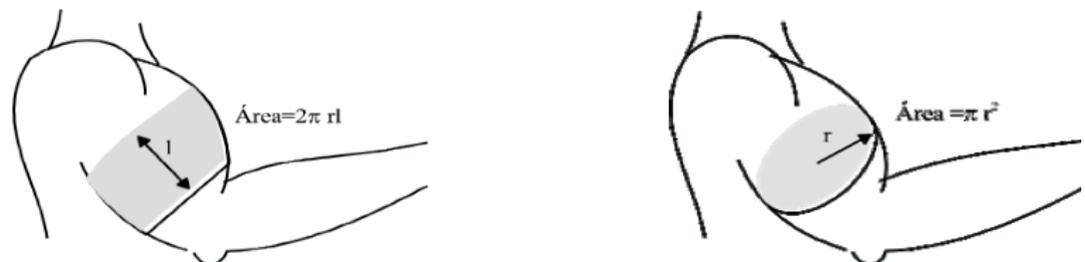
Habíamos supuesto que el ritmo metabólico crecía con el área de los pulmones, es decir, con A . Si suponemos ahora que RM crece con la potencia muscular, esa potencia es proporcional al área *transversal*, ya que se considera que una fibra muscular de cualquier animal ejerce la misma fuerza y que la velocidad de contracción de cada fibra muscular es, esencialmente, la misma. La potencia:

$$P = F \cdot v$$

$$P \propto \text{Área} \cdot \text{velocidad}$$

Figura 20a. En el primer cálculo utilizamos el área lateral ($AL = 2\pi rl$) para calcular la potencia.

Figura 20b. Utilizar el área transversal ($AT = \pi r^2$) conduce a los resultados correctos.



Si la fuerza por unidad de área σ que puede hacer una fibra de un músculo es la misma para cualquier animal, entonces, para aumentar la fuerza se debe aumentar el número de fibras, es decir, el área transversal. Esto coincide con nuestra experiencia diaria, donde una persona con músculos de mayor tamaño normalmente resulta más fuerte.

$$(A \propto 2\pi rl)$$

Si la velocidad de contracción muscular, según ha sido demostrado en numerosos experimentos, no depende del tipo de animal, la velocidad en la expresión de la potencia será la misma en todos los casos y la potencia no dependerá de ella.

Por lo tanto, la potencia finalmente resulta proporcional al área transversal:

$$P \propto \text{Área} \propto r^2 \propto (m^{3/8})^2 = m^{3/4} = m^{0.75}$$

Este valor, como vemos, se ajusta muy aproximadamente con los datos de la Figura 19b, tanto para el área como para el ritmo metabólico.

La primera aplicación de relaciones de escala que mostramos en los ejemplos buscaba justificar la relación entre una dimensión (la altura de un árbol en función de su diámetro o la relación entre la tensión de una cuerda y el volumen). El factor limitante en la escala geométrica era una propiedad intensiva de la materia que permanece inalterada frente a los cambios de escala (en ambos casos, el módulo de Young del material).

Muchos ejemplos de leyes de escala utilizadas en biología se refieren a relaciones geométricas sencillas y directas basadas en comprobaciones empíricas. A este grupo pertenece el ejemplo presentado en la Figura 20 que relaciona la superficie corporal de ejemplares de una misma especie (los mamíferos) con su masa. Podrían imaginarse muchos ejemplos de este tipo y, en realidad, hay leyes de escala estudiadas que relacionan un sinnúmero de parámetros con la masa. Pueden clasificarse en:

Longitudes de patas, alas o de un hueso característico cualquiera (como el fémur o la tibia) en función de la masa en diferentes especies, que van desde insectos, ratones, canguros, aves, peces, hasta antílopes y elefantes.

Superficies externas, musculares, pulmonares, etc., en función de la masa.

Volúmenes pulmonares, sanguíneos, etc., en función de la masa.

En todos estos casos se establece una proporcionalidad con la masa, de forma tal que, si la suponemos distribuida uniformemente entre diferentes partes del cuerpo, se pueden realizar cálculos relacionales sencillos y directos.

Por ejemplo, si suponemos que entre diferentes animales de una especie se mantienen relaciones como las siguientes:

- masa muscular/masa total
- masa pulmonar/masa total
- masa del corazón/masa total
- masa de sangre/masa total,

con ellas podemos comenzar a establecer cálculos dinámicos indirectos, basados en las leyes de escala obtenidas anteriormente.

Se pueden obtener conclusiones sobre variables dinámicas del sistema circulatorio, como la presión sanguínea o, como en el ejemplo mostrado, el ritmo cardíaco y la masa o tamaño del animal; o bien, el período respiratorio o el volumen de aire del sistema respiratorio, en función de la masa: datos que, bajo algunas circunstancias, permiten estimar la vida media de un individuo promedio de una especie, en función de información obtenida en otras (o, por ejemplo, estimando el número máximo —estadístico— de latidos que puede proporcionar un corazón).

En 1973, McMahon utilizó una hipótesis de escala con *dos dimensiones características* (l y r) que mantienen entre ellas una proporción $l = r^{0.66}$, una relación no lineal que fue utilizada previamente para explicar la altura máxima que logran alcanzar los árboles, en función del radio de su tronco, y con ella logró justificar con sus cálculos las curvas de los datos obtenidos por Kleiber cuarenta años antes.

F. OBTENCIÓN DE UNA LEY DE SEMEJANZA ELÁSTICA. EL EXPONENTE 2/3

Hemos mencionado que la relación $l = k r^{2/3}$ provino inicialmente del cálculo de la máxima altura que alcanzan los árboles hasta romperse por peso propio. En la Figura 17b se muestra lo que denomina-

mos “problema de Galileo invertido”, advirtiendo que el esfuerzo de compresión será dominante si $l/r < 15$. En efecto, si se supera ese límite (que es aproximado), aparece sumada a la compresión la flexión lateral o “pandeo”, que aplicado al caso de un árbol significa que una desviación respecto del centro de gravedad del peso propio del árbol (P), por el viento o cualquier otra causa, hará aparecer un momento flexor que tiende a curvar el tronco, como en la Figura 21a.

Figura 21a.(izq.) Esquema que representa la flexión lateral en un árbol y la deformación producida, una curvatura de radio R.

Figura 21b. (der.) Modelo para calcular el peso máximo (P_{MAX}) que produce la ruptura del tronco debido a la flexión lateral o pandeo. Cálculo de la relación $l = r \cdot 2/3 = r \cdot 0,66$.

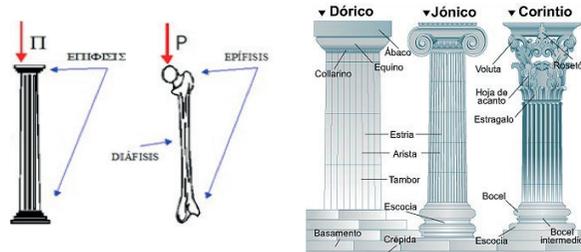
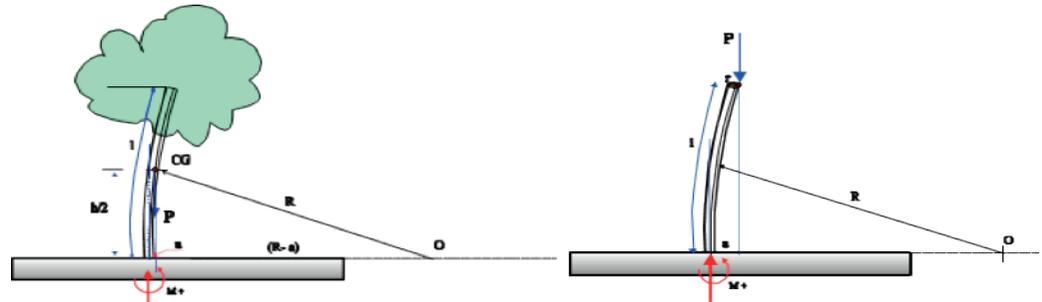


Figura 21c. (izq.) El hombre imita (y recrea) las formas de la naturaleza, como las que aparecen en los huesos largos del cuerpo humano (centro), y por ejemplo construye columnas para disminuir el efecto del pandeo por una carga excéntrica P (π).

Figura 21d. (der.) Los tres capiteles del griego clásico.

Para calcular esa deformación, suponemos que P aplicado en el centro de gravedad (CG) tiende a producir una curvatura, como indica la Figura 21a. Un modelo mínimo que muestra las variables que intervienen se puede ver en la Figura 21b.

Por similitud geométrica en estos problemas, no debe extrañar que la naturaleza en los huesos principales y el hombre en sus construcciones arquitectónicas tiendan a evitar este efecto, como se ve en las Figuras 21c y 21d.

El cálculo detallado que conduce a la proporción $l = r \cdot 2/3$ se puede encontrar en Kane y Sternheim (1991), pero debe destacarse que no es el único modo de obtener esta relación. Por ejemplo, McMahon y Bonner (1983) proponen una alternativa para obtener esa proporción, y hay otras.

3. ESTRUCTURA Y FUNCIÓN A. CRECIMIENTO Y TRANSFORMACIONES

Desde la publicación, en 1917, del tratado de D'Arcy W. Thompson, *On Growth and Form*, en el que se consideraba la idea de la existencia de leyes físicas y matemáticas subyacentes a la aparición de las diferentes formas en la naturaleza, en particular, en los seres vivos, numerosos trabajos han intentado descubrirlas. La Figura 22a, tomada de su libro, ha sido difundida innumerables veces por muchos autores y, aunque su punto de vista puramente geométrico no ha entrado en la biología, resulta sorprendente el camino abierto dentro de la ciencia para el estudio unificado del problema de la aparición de formas y estructuras (morfogénesis) en distintos ámbitos de la ciencia.

La idea de que una forma en la naturaleza pueda surgir de otra más básica por la transformación de sus dimensiones relativas se analiza muy bien con un sistema cartesiano superpuesto. Estas observaciones de Thompson han dejado una fuerte impresión sobre el mundo científico. Así, por ejemplo, los peces de la Figura 22a se presentan aquí como variaciones de una misma especie de pez (acantopterigios) que podría haber adaptado su forma a diferentes condiciones ambientales durante la evolución, por ejemplo, a un cambio de presión, al verse obligado a sobrevivir a diferentes profundidades marinas.

Dentro de la biología, importantes trabajos en esta dirección (por ejemplo, el de J. Huxley, *Problems of Relative Growth*, de 1932) retomaron las ideas de Thompson sobre una base matemática más firme. Sin embargo, y comparados con otros ámbitos de esta misma ciencia, recibieron poco tratamiento en décadas posteriores.

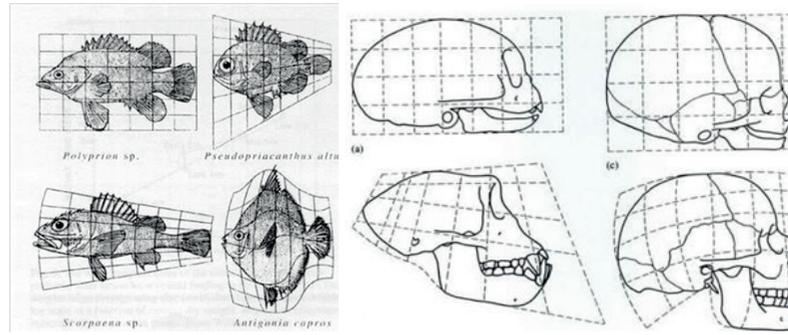


Figura 22a. (izq.) Transformaciones en una serie de peces. Unas formas se derivan de otras mediante las transformaciones cartesianas dibujadas, causadas por un cambio en las propiedades del espacio. La figura reproduce las figuras 150 a 153 del tratado de D'Arcy Thompson (1917) [10]. **Figura 22b. (der.)** Crecimiento craneal en un macaco "Rhesus" recién nacido (izquierda arriba) y abajo, un ejemplar de la misma especie anciano. A la derecha, la misma evolución en la vida de un cráneo humano. Nótese las particiones óseas que permiten un mayor desarrollo del cerebro humano (Thompson, 1917).

Aunque muy atractivas desde el punto de vista intuitivo dentro de la biología y de la ciencia en general, estas ideas recién actualmente están siendo tratadas con la extensión y profundidad científica que requieren. La posibilidad de estudiar la aparición de formas desde la perspectiva de la física (y posteriormente de la química), es decir, expresada en leyes matemáticas derivadas de primeros principios y comprobadas experimentalmente, es un problema aún abierto y en incesante investigación.

El problema de Thompson que hemos presentado subraya un aspecto que parece requerir de una base previa: antes de estudiar *cómo se pasa* de una forma a otra (cómo se transforma una estructura), parece necesario comprender previamente *cómo se forma*, es decir, a qué mecanismo responde su aparición, para luego ocuparse del mecanismo de la transformación o el crecimiento.

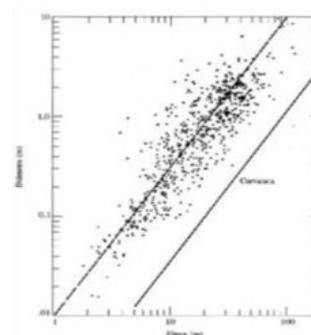
La cuestión de la *morfogénesis* y la *emergencia* de nuevas formas y propiedades abarca desde las formas básicas que aparecen en el mal denominado «universo inanimado» (ya que el universo está permanentemente en movimiento) hasta las formas vivas observables en biología, botánica o en los mecanismos de la fisiología vegetal. Todo grupo autoorganizado que exhibe comportamientos colectivos complejos como la organización de las colectividades de animales como las hormigas o las abejas, el movimiento colectivo de las aves y los peces y aún en las sociedades humanas, hasta el propio pensamiento, son conjuntos de sistemas individuales donde la formación de patrones complejos es una constante fácilmente observable.

B. EL TAMAÑO Y EL ESPACIO DISPONIBLE

Mencionamos que sorprende un poco que, dada la diversidad casi infinita de formas que la naturaleza nos presenta en todos los ámbitos, el número en la variedad de formas geométricas subyacentes que existen sea relativamente limitado. En primer lugar, es necesario conocer cuáles son las formas básicas que una determinada geometría permite desarrollar en un espacio o que limita su crecimiento.



Figura 23 a. Secuoya gigante comparada con dos especies de pino. Muestra el mayor aumento del diámetro con la altura. A la secuoya parece que le faltara la punta, pero aún corrigiendo eso, es notorio que el tronco ha crecido más rápido que la altura (como en la ley de escala $l = k \cdot m^{0,25}$). Hay semejanza "elástica", pero no "geométrica" [16].



Otros ejemplos de aprovechamiento elástico que pueden asimilarse a los presentados anteriormente como límite elástico son los de las Figuras 25a y 25b. El flamenco de la figura soporta su propio peso, corre y vuela y, además, sorprende por lo delgadas que son sus patas. Es evidente que soportan el peso propio sin dificultades con la masa que tienen. Pero cualquier apartamiento del peso respecto del centro de gravedad sabemos que producirá flexión lateral. La naturaleza podría haber aumentado el diámetro de sus patas para estabilizarlo, como en el caso del avestruz, pero eso le haría más difícil volar. El avestruz no vuela; se ha calculado (Kane y Sternheim, 1991) que debería correr a 105 km/h para levantar vuelo, una velocidad que no puede alcanzar.

En el caso del flamenco, la naturaleza aprovecha otra propiedad elástica que le permite tener patas de menor diámetro que, por ejemplo, el avestruz. Unas patas que soportan la flexión lateral y la com-



Figura 24. Disco cortado del tronco de un árbol petrificado, donde se ven los anillos de crecimiento anual. Se puede estudiar en él la tasa de crecimiento anual del tronco y obtener una estimación de su altura, suponiendo que haya alcanzado la máxima.



Figura 25a. El flamenco tiene las patas, huecas lo que disminuye su peso total. Esos “tubos” son capaces de soportar del peso sin ceder a la flexión lateral, y le permiten volar. Un avestruz de esa altura no podría volar. Se calcula que para despegar debería correr a 105 km/h, cosa que por su peso no puede hacer.

Figura 25 b. Muchos insectos son capaces de pararse sobre el agua gracias a la tensión superficial y a tener un número de patas suficientes para distribuir su peso. Sobre la diagonal, un modelo metálico construido a escala bajo el mismo principio (gentileza de J. Bush, MIT).

presión. Las patas de estos animales son huecas, es decir, a igualdad de diámetro exterior tienen menor peso, lo que contribuye a la capacidad de volar. Una estructura hueca permite, a igualdad de masa (necesaria para soportar el peso a la compresión), que tenga un momento de inercia a la flexión lateral o pandeo mayor que una maciza de la misma masa, aumentando así su resistencia al pandeo.

Es sabido que, formando un cilindro de 3 o 4 cm, con un simple folio A4 de papel común de impresora (de 80 g/m²), se puede sostener el peso de un libro de más de 1 kg, si se lo coloca con cuidado.

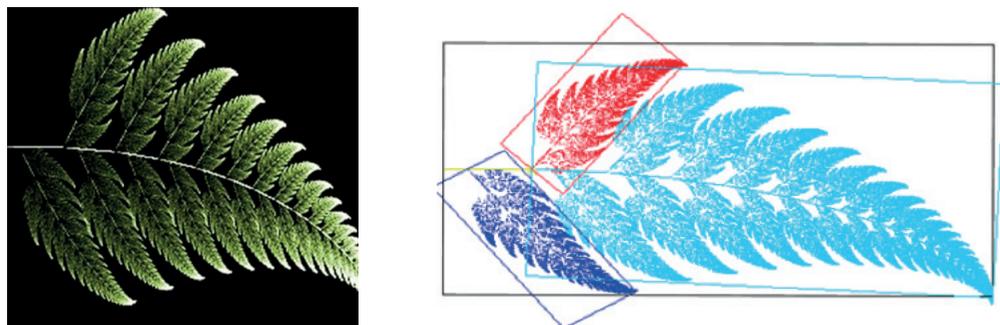
Por último, la tensión superficial en fluidos como el agua puede sostener pesos importantes de sólidos cuya densidad es mucho mayor que la del fluido. Sabemos que muchos insectos se paran sobre el agua gracias a la tensión superficial. Un conocimiento profundo del fenómeno permite diseñar un modelo en metal a mayor escala y con mucho mayor peso, pero que, manteniendo la semejanza elástica, también se sostiene sobre la superficie, como se puede ver en la Figura 25b.

C. OBJETOS FRACTALES

Muchas regularidades que aparecen en seres vivos, por ejemplo, en vegetales, se pueden expresar mediante leyes matemáticas y, dentro de estos ámbitos de estudio, uno de los más explorados es el de la *filotaxis*. Algunas de estas formas son de expresión matemática relativamente sencilla, ya que las formaciones poseen una gran regularidad. Hemos mostrado una flor de girasol, una piña (Figuras 3a y 3b), pero el número de casos no se agota aquí. Por ejemplo, la disposición de tallos en torno del tronco presenta muchos casos de formación en espiral que son observables cotidianamente.

Mediante simulación numérica se pueden establecer modelos de crecimiento con ordenamientos que, en muchos casos, reproducen adecuadamente las formas observadas como en el caso de la Figura 5b. En la segunda mitad del siglo XX comenzaron a estudiarse bajo un marco común las estructuras que aparecen fuera del equilibrio físico-químico, que el premio nobel I. Prigogine llamó “estructuras disipativas fuera de equilibrio” (Nicolis y Prigogine, 1977), porque para su existencia requieren de un sistema termodinámico abierto, fuera de equilibrio, por el que circule un flujo permanente de energía o masa. Entre estos sistemas se encuentra el soporte físico-biológico de todos los seres vivos y actualmente está siendo analizado bajo la perspectiva de la física (Nicolis y Nicolis, 2007; González Viñas, y Mancini, 2004; Boccaletti, 2007).

Figura 26. Crecimiento fractal de una hoja de helecho (izquierda) y el resultado de un modelo matemático (derecha). Nótese por un lado, la autosimilaridad a distintas escalas entre las hojas y el conjunto, y por otro, la alternancia derecha-izquierda de cada hoja siguiendo un patrón fijo de bifurcaciones [16].



La Figura 27a presenta un caso más complejo de ordenamiento en espiral sobre un cono, que tiene una geometría fractal en el espacio. Se trata de un vegetal de la familia del brócoli, llamado romanesco.

La dimensión de un objeto fractal no es un número entero. No son tres dimensiones, pero tampoco dos. La fractalidad describe la particularidad que posee una estructura fractal básica que es capaz de repetirse como detalle una y otra vez, a diferentes escalas cada vez más pequeñas. Pero en este caso, el ordenamiento es en el espacio.

Nótese en la Figura 26 cómo la hoja de helecho también está formada por una estructura de hojas que aparecen por sucesivas bifurcaciones a derecha e izquierda del tronco central, repitiendo cada una de ellas la estructura de la hoja completa, en hojas cada vez más pequeñas a medida que se alejan del tronco. Estas hojas “secundarias”, a su vez, repiten la forma global, y se van dividiendo en otras “terciarias” manteniendo el aspecto de la forma principal. Esta propiedad se conoce como autosimilaridad de los sistemas fractales (Mandelbrot, 1982; Voss, 1988; Guyon y Stanley, 1991).

Podemos hacernos una idea de lo que es una “dimensión fractal” tomando un folio de papel para imprimir, que es una superficie bidimensional, y arrugándolo repetidas veces hasta formar una bola, más o menos regular, como se suele hacer a diario para arrojarlo a una papelera.

¿Cuántas dimensiones tendría ese objeto ahora?

Al arrugar la hoja, ha desarrollado una tercera dimensión, una altura (o diámetro), pero no es un objeto como un sólido regular, que tiene tres dimensiones. Esa superficie, inicialmente plana de dos dimensiones, sufrió numerosas transformaciones y ahora es una superficie alabeada de forma irregular, llena de pliegues desordenados, y su densidad dependerá, entre otras cosas, del número de veces que

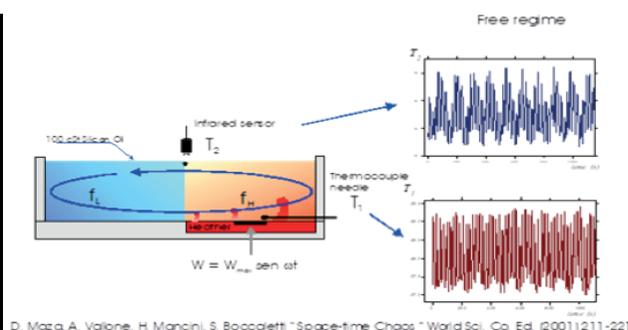


Figura 27a. Un fractal comestible.

La col romanesco, de la familia del brócoli.

Figura 27b. Sincronización y control de un flujo con temperaturas caóticas, provocadas por una inestabilidad de capa límite (Maza D., Vallone A., Mancini H., Boccaletti, S. PRL.).

hemos repetido la operación y de lo compacto que sea el objeto obtenido. Su dimensión estará entre 2 y 3, es decir, será un número fraccionario mayor que 2 y algo menor que 3.

Establecer la dimensión fractal de estos objetos requiere primero de una definición rigurosa, la más usada de las cuales es la llamada “dimensión de Hausdorff” (Voss, 1988). Pero no podemos entrar aquí en este tema debido a su extensión. Solo mencionamos tangencialmente su importancia porque junto con el caos (Strogatz, 19994), la mecánica estadística y la teoría de la información son insoslayables dentro de la física de los “sistemas complejos” (Nicolis y Nicolis, 2007).

4. CONCLUSIONES

El ámbito de estudio de la aparición de estas formas, «pautas» o configuraciones en el espacio y su comportamiento en el tiempo (ritmos) es tema del capítulo de la física actualmente llamado dinámica no lineal.

En la fisiología humana y vegetal hay numerosos ejemplos de órganos con ordenamiento fractal en el espacio o con un comportamiento caótico en el tiempo. Estos dos conceptos modernos de comportamiento espacial y temporal en muchos casos vienen asociados, en particular en los “sistemas complejos”, los cuales forman una nueva categoría de sistemas físicos que pueden presentar toda la riqueza combinada de la geometría fractal y de los comportamientos caóticos espacio-temporales. Los sistemas complejos no son sistemas “complicados”, como pueden ser un ordenador o un satélite de comunicaciones, donde cada parte cumple una función específica con precisión. Estos sistemas, normalmente con un gran número de subsistemas, con los comportamientos citados anteriormente, al acoplarse entre sí por algún mecanismo como la sincronización (Boccaletti, 2007), suelen producir comportamientos colectivos o patrones emergentes nuevos dando lugar a la “emergencia” (Chibbaro, *et al.*, 2014) de situaciones y propiedades que no estaban en los componentes del sistema original y que dependen tanto de las dinámicas individuales de los subsistemas que lo componen, como de las propiedades de los acoplamientos (Boccaletti, 2007).

Por ejemplo, en los seres humanos, las ramificaciones pulmonares que aparecen desde la tráquea, las ramificaciones dendríticas de las neuronas o de los vasos sanguíneos del sistema circulatorio parecen mostrar una estructura fractal. En el dominio del tiempo, las señales del corazón tienen latidos que parecen desordenarse siguiendo distintos regímenes de funcionamiento, entre ellos los caóticos (Murray, 1993).

Aunque muchos de estos estudios no pasan aún de la fase experimental, resulta sorprenden-

Figura 28a.(izq.) Otro ejemplo de crecimiento fractal, "agregación limitada por difusión (DLA)". Un experimento de electro-deposición de cobre.

Figura 28b.(der.) El "conjunto de Mandelbrot". Ejemplo de un "objeto matemático" (definido por ecuaciones) con geometría fractal



te verificar que, en las funciones corporales humanas, el caos parece ser norma de buena salud. Un comportamiento demasiado regular y periódico, por el contrario, parece presagiar una enfermedad. El crecimiento de estructuras fractales (Guyon y Stanley, 1991) y el caos espacio-temporal (Strogatz, 1994) son temas de investigación de frontera en la ciencia de los sistemas complejos (Nicolis y Nicolis, 2007) y seguramente conducirán a resultados promisorios, tanto en biología, fisiología o medicina, como en ecología, sociología, economía, y en muchas otras disciplinas.

Una manera de crecer es multiplicarse, pasar de ser un organismo unicelular a pluricelular. En la base de la estrategia biológica del crecimiento y en la reproducción biológica está la división celular. La Figura 29a muestra cuatro imágenes progresivas en la división de un huevo de rana (McMahon y Bonner, 1983).

En los experimentos de convección en fluidos que hemos presentado también se verifica que, aumentando la relación de aspecto o el parámetro de control (la cantidad de calor que fluye), también aumenta el número de celdas en que se divide el patrón. Cuando llegamos a cuatro, independientemente de la geometría en las condiciones de contorno, aparecen las cuestiones más básicas de la simetría, como puede verse en la Figura 29b. Las figuras de abajo, ambas de pequeña relación de aspecto (Koschmieder, 1993; Mancini, 2007), han sufrido una bifurcación espacial de un nodo de segundo orden (con 4 ángulos a 90°) a dos nodos de primer orden, más estables (con 3 ángulos por nodo, a 120°) partiendo de la situación anterior (arriba).

La relación de aspecto intermedia (derecha) es una superposición de modos (radial (1,0) + azimutal (0,4)) para dar el modo compuesto: (1, 4) que se ve en la Figura 29b de la derecha. Al igual que en las anteriores figuras con un modo (0,4) que tienen distintas condiciones de contorno (cuadradas o circulares), presentan la misma bifurcación espacial. Las particiones son una cuestión relativa a los modos radiales (ver Figura 29b). La manera de dividirse de estas células de fluido en convección es notablemente similar a la que se produce en el crecimiento por división celular del huevo de rana de la Figura 29, lo que invita a explorar la posible similitud de los mecanismos físicos subyacentes. ¿Habrá una similitud dinámica oculta?

UN TEMA DE INVESTIGACIÓN ABIERTO

Las formas presentadas anteriormente son una minúscula muestra del estudio desplegado en la actualidad sobre este tipo de fenómenos y estructuras. Muchas cuestiones aún no tienen respuestas convincentes. Por ejemplo, además de poder expresar matemáticamente las formas y analizar su aparición, podemos preguntarnos:

- ¿Sería posible formular una ley física para el crecimiento y evolución de un individuo dentro de una especie? ¿Y para la evolución de toda una especie en un entorno determinado?

Si fuera posible:

- ¿Cuál sería el mecanismo general subyacente en la obtención de una determinada forma?
- ¿Cómo y cuánto depende una forma particular de variables ambientales (entorno) y cuánto de sus propias leyes de crecimiento?
- ¿Están las formas predeterminadas genéticamente por una información previa almacenada?
- ¿De dónde ha surgido la información necesaria para la primera forma de una especie?
- ¿Existe un intercambio de información entre los distintos órganos de un cuerpo para mantener unas determinadas proporciones y unas funciones entre sí?

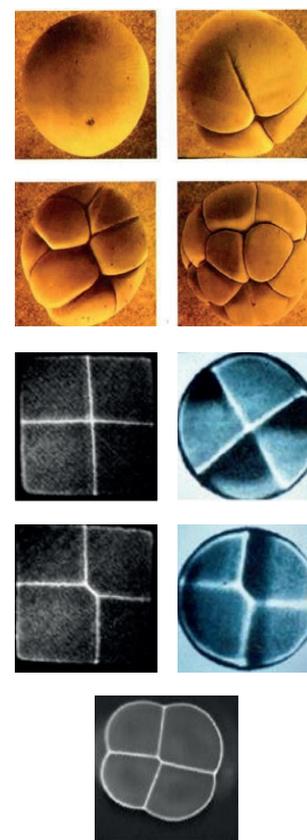


Figura 29a. (En amarillo) Un huevo de rana crece pasando de unicelular a pluricelular. Se muestran 4 pasos en el aumento del número de células por la división que provoca el crecimiento. De una célula aparecen 2, 4, 8, 16, etc. Usar la partición en 4 para comparar con el experimento de abajo

Figura 29b. (abajo) Convección de Bénard-Marangoni en pequeña relación de aspecto, cuando aparece una división en 4 celdas con condiciones de contorno cuadradas (izq.) y circulares (der.) y con relación de aspecto intermedia (derecha) con un modo (1,4). Las dos figuras de arriba muestran la separación de un vértice (o nodo) de orden 4 (4 ángulos rectos) que se separan en dos vértices de orden 3 (con 3 ángulos a 120°) (abajo).3

3: La distancia que los separa, inicialmente estacionaria, se vuelve dependiente del tiempo al aumentar el flujo de calor y su longitud comienza a oscilar después de superar un cierto umbral, hasta que por fin la oscilación se transforma en caótica. Esta situación es muy semejante a la partición en 4 de la figura 29 a.

- ¿Hay un coordinador central que regule la proporción que deben mantener las partes con el todo?
¿O la información está distribuida por todo el organismo?

En este trabajo “a vuelo de pájaro”, hemos intentado mostrar la generalidad del análisis de las formas (*pattern formation*) y su importancia en el estudio de la naturaleza, y puede parecer desalentador terminar así, casi con tantas preguntas como cuando comenzamos.

Sin embargo, alienta saber que la naturaleza parece haber encontrado algunas respuestas razonablemente permanentes.

Al comienzo de este trabajo, mostramos en la Figura 4a el corte un fósil petrificado que vivió hace más de 150 millones de años, el nautilo camerado En la Figura 4b, pudimos ver la caparazón de un nautilo actual.

Si comparamos las figuras, vemos el ejemplo de una especie cuya estructura y mecanismo subyacente de crecimiento y locomoción, esencialmente, siguen siendo los mismos que hace 150 millones de años (Hay fósiles de ammonites de ese tipo, anteriores al Pérmico). La especie ha sobrevivido durante esos millones de años esencialmente sin evolucionar, a pesar de los violentos cambios geológicos que transformaron su hábitat de un único continente (Pangea) y un solo océano (Pantalasa), a la situación geográfica actual (Tarbuck y Lutgens, 1999).

Según los biólogos evolucionistas, algunas de estas formas han sobrevivido a cinco extinciones masivas. Entre ellas la del Pérmico, que hizo desaparecer el 95 % de las especies marinas. La supervivencia de esta forma particular en la naturaleza no es la única esperanza para proseguir con estos estudios.

A nivel molecular, también existen problemas de tamaño, forma y función, que han sido resueltos por la naturaleza de manera admirable.

Muchas macromoléculas, entre ellas las proteínas, son polímeros que repiten una estructura básica (el monómero), un número altísimo de veces (González Viñas y Mancini, 2004). Las proteínas están compuestas por aminoácidos, que en solución coloidal forman cadenas lineales con dimensiones variables, llamadas hebras, que pueden reunir desde 50 hasta 100 o más unidades de distintos aminoácidos.

Normalmente, las hebras a su vez se estructuran mediante un plegamiento sobre sí mismas, creando formas o configuraciones “terciarias” más compactas, con relaciones de tamaños (altura y dimensión transversal) que no exceden demasiado de 5:1. Estas estructuras espaciales secundarias desarrollan polaridades globales que les sirven para seguir asociándose en estructuras cada vez mayores y más complejas (Figura 30) (González Viñas y Mancini, 2004).

Ya es historia afirmar que, en 1951, el premio nobel Linus Pauling predijo teóricamente que debería existir “un estado termodinámicamente estable y con una estructura espacial definida (helicoidal) para determinadas proteínas”. En 1953, Watson y Crick presentaron la evidencia experimental de esa estructura en doble hélice (Figura 31) en las moléculas de ADN y ARN, y en 1958, Kendrew hizo lo propio para la molécula de mioglobina, poniendo en evidencia, por primera vez, la raíz de la relación entre *estructura y función* a nivel molecular.

El estado predicho por Pauling es necesario porque las cadenas de aminoácidos en solución (estructuras secundarias) pueden presentar múltiples configuraciones, y de no existir ese estado, aparecería lo que se conoce como “la paradoja de Levinthal”. En 1968, Levinthal demostró que el problema de hallar la configuración terciaria para una proteína “necesariamente implica un *proceso evolutivo*” (Olivares-Quirós y García-Colín, 2004).

En efecto, si una proteína estuviera integrada por N aminoácidos y cada uno de ellos pudiera adquirir v configuraciones espaciales, entonces el número C de posibles configuraciones tridimensionales sería:

$$C = v^N$$

Para una proteína de dimensiones pequeñas con N = 100 y considerando el mínimo de n = 2 configuraciones espaciales posibles, esto significa $C = 2^{100}$, un número astronómico. El tiempo necesario para que esa proteína explore al azar todas esas posibles configuraciones para alcanzar la más estable supera a la edad del Universo. Por ello, es necesario que el procedimiento de buscar la estructura más estable sea previamente orientado.

Hoy sabemos que, en una célula, las cadenas de los ácidos ADN y ARN median aportando la información necesaria para encontrar ese estado y evitar el azar, que hubiera frenado la evolución de la vida en ese punto.

En la naturaleza, para las proteínas más pequeñas, el tiempo de plegado es solo de pocos milisegundos. Actualmente se conocen plegamientos ultrarrápidos que adquieren su configuración espacial en tiempos de microsegundos (Olivares-Quirós y García-Colín, 2004).

Aún queda una tarea enorme por delante para responder las preguntas cuyas respuestas todavía no se conocen.

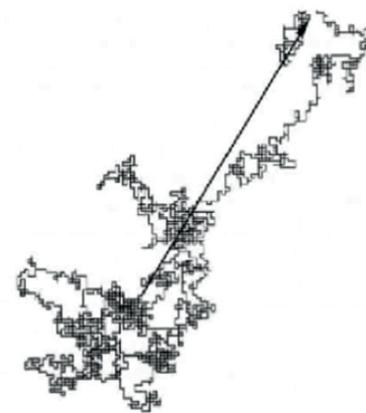
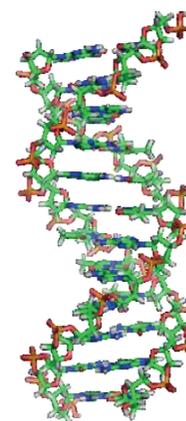


Figura 30. Simulación numérica del plegamiento de una macromolécula, por ejemplo, una proteína [24].

Figura 31. Esquema del ordenamiento en una doble espiral, de la molécula más famosa en biología: el ácido desoxirribonucleico o ADN.



REFERENCIAS

Se ha procurado presentar bibliografía general e introductoria, especialmente libros de alta divulgación científica o artículos de revisión (*reviews*) importantes, ordenados históricamente, cuando el texto lo ha permitido, sin restar precisión ni claridad a los conceptos que se introducen. Estas referencias no son *exhaustivas* sino *orientativas* y no agotan el tema.

- Bénard, H. (1900). "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide". *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, 11, 1261-1271, 1309-1328.
- Boccaletti, S. (2007). *The Synchronized Dynamics of Complex Systems*. Elsevier.
- Bossomaier, T. y Green, D. (1998). *Patterns in the sand: Computers, complexity, and everyday life*. Reading, MA: Helix Books/Perseus Books.
- Cerisier, P., Pérez García, C., Jamond, P. y Pantaloni, C., (1987). "Wavelength selection in Bénard-Marangoni convection". *Physical Review A*, 34, 1949-1952.
- Chibbaro, S., Rondoni, L. y Vulpiani, A. (2014). *Reductionism, Emergence and Levels of Reality. The Importance of Being Borderline*. Springer.
- Cross, M. y Hohenberg, P. (1993). "Pattern formation outside of equilibrium". *Review of Modern Physics* 65, 851-112.
- *El Universo. Enciclopedia de la Astronomía y el Espacio*, (2004), Vol. I, "El Sistema Solar", Planeta DeAgostini.
- Feynman, R. P., Leighton R. y Sands M. (1964). *The Feynman Lectures on Physics*. Reading: Addison-Wesley.
- Galileo Galilei. (1945). *Diálogo de dos nuevas ciencias*. Buenos Aires: Ed. Librería del Colegio (Edición original de 1638).
- García Velarde, M. y Normand C. (1980). "Convection". *Scientific American*, 243, 92-109.
- González Viñas, W. y Mancini, H. (2004). *An introduction to Material Sciences*. Princeton University Press.
- Guyon, E., Stanley, H. (1991). "Les Formes Fractales". Elsevier.
- Haken, H. (1984). "El Secreto de los éxitos de la Naturaleza: Sinérgica, la doctrina de la acción de conjunto". Barcelona: Argos-Vergara.
- Kane, J. y Sternheim, M. (1991). *Física*. Barcelona: Editorial Reverté.
- Koschmieder, L. (1993). "Bénard Cells and Taylor Vortices". Cambridge: Cambridge University Press.
- Mancini, H. (2007). "Formación y control de estructuras fuera de equilibrio". En *Láseres: Desarrollos y Aplicaciones*, Colección Ciencia y Tecnología, UNSAM EDITA.
- Mandelbrot, B. B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman.
- Manneville, P. (1991). "Structure Dissipatives, Chaos et Turbulence". París: Alea Saclay.
- McMahon, T. y Bonner, J. (1986). *Tamaño y vida*. Barcelona: Prensa Científica S.A., Ed. Labor.
- Murray, J. D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2° edición, 1993).
- Nicolis, G. y Nicolis, C. (2007). "Foundations of Complex Systems. Nonlinear Dynamics, Statistical Physics, Information and Prediction". *World Scientific*, Singapore.
- Nicolis, G. y Prigogine, I. (1977). *Self Organization in Nonequilibrium Systems, from Dissipative Structures to Order through Fluctuations*. Nueva York: J. Wiley.
- Normand, C., Pomeau, Y. y García Velarde, M. (1977). "Convective instability: A physicist's approach", *Reviews of Modern Physics*, 49(5), 581-624.
- Olivares Quirós, L. y García Colín Scherer, L. (2004). "Plegamiento de las proteínas", *Rev. Soc. Quim. Mex.* 48, 95-105.
- Rabinovich, M., Ezersky, A. y Weidman, P. (2000). "The Dynamics of Patterns". *World Scientific*, Singapore.
- Stevens, P. S. (1986). *Patrones y pautas en la naturaleza*. Barcelona: Ed. Salvat.