LA GUERRA DE TROYA COMO UN SISTEMA DINÁMICO: MATEMÁTICA EN LA ÉPICA

JUAN CÉSAR FLORES ARAYA

INSTITUTO DE ALTA INVESTIGACIÓN,
UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ. ARICA. CHILE.

RESUMEN. Ecuaciones cinéticas del tipo reacción-difusión, en conjunto con datos arqueológicos y bibliográficos, son utilizadas para describir algunos aspectos de la (hipotética) guerra de Troya a fines de la Edad de Bronce en Hisarlik, Turquía (aproximadamente 1200 a. C.). Los parámetros de las ecuaciones propuestas son evaluados. Las estimaciones del número de guerreros de ambas facciones, griegos y troyanos, son realizadas. Los números de la épica no parecen severamente inadecuados. En efecto, el número final de troyanos se estima en 4655 para una ciudad capaz de mantener 6000 individuos.

PALABRAS CLAVES: REACCIÓN-DIFUSIÓN, MODELAMIENTO MATEMÁTICO, DATOS ARQUEOLÓGICOS, LEY DE LANCHESTER.

ABSTRACT. In this work reaction-diffusion kinetic equations, together with archaeological and bibliographical data, were employed to describe certain aspects of the Troyan war that, supposedly, took place during the late Bronze Age (around 1200 BC) in Hisarlik, Turkey. The parameters for the equations proposed were assessed, and the number of warriors from each army (Greek and Troyan) was estimated. The data from Homer's *Iliad* do not seem unsound. In fact, the final number of Troyan warriors was estimated to be 4,655 in a city of 6,000 inhabitants.

KEYWORDS: REACTION-DIFFUSION, MATHEMATICAL MODELLING, ARCHAEOLOGICAL DATA, LANCHESTER'S LAW. ABRIL DE 2010

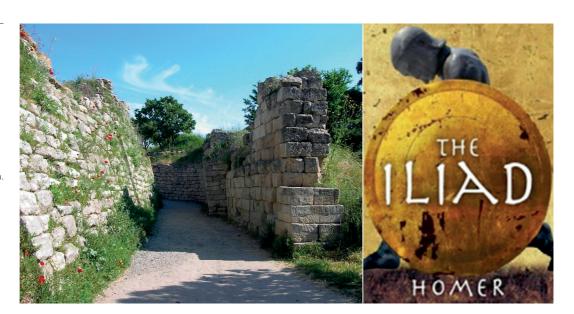
INTRODUCCIÓN: LOS DATOS ARQUEOLÓGICOS

La zona arqueológica de la ciudad de Troya, en Hisarlik (Turquía), frente al mar Egeo, tiene una elevación de alrededor de 9 metros y representa al menos unos 3000 años de ocupación (Korfmann, 1995, 2004; Heuck Allen, 1999; Maher, 2003; Kolb, 2004; Rose, 2004). La ciudad, llamada también llios en esa época (Homero, *llíada*), poseía una superficie cercana a los 200 000 metros cuadrados y —un dato muy importante para este trabajo—, hacia el año 1200 a. C., aproximadamente la fecha de la conjeturada guerra entre Troya y Grecia (asentamiento VIIa) tenía unos 6000 habitantes (Korfmann, 1995). Desde un punto de vista arquitectónico, la ciudad contaba con dos elementos defensivos (Korfmann, 1995, 2004; Rose, 2004). En el primer perímetro defensivo exterior, un dique del orden de los 3,6 metros de ancho y 1,8 metros de profundidad. Las famosas murallas (Homero, *llíada*), el segundo elemento de defensa al interior del perímetro dibujado por el dique, tenían por lo menos 8 metros de altura y estaban compuestas de piedra caliza y adobe. Dichas murallas tenían una leve inclinación para favorecer su defensa. En la actualidad, de ellas solo quedan algunos elementos restaurados como muestra la Figura 1.

Figura 1. A la izquierda, la ciudad arqueológica de Troya y sus famosas murallas (Hisarlik, Turquía) descubiertas por Calvert y Schliemann en 1871.

La ciudad tuvo al menos 3000 años de ocupación. La Troya homérica estaría supuestamente entre las capas VI y VII de la excavación y corresponde al fin de la Edad de Bronce (aproximadamente 1200 a. C.). El área total, incluida su periferia (el dique), es ~200 000 (m²), de acuerdo con el arqueólogo M. Korfmann (1995).

A la derecha, la portada de una de tantas versiones de la *lliada*.



Desde otro punto de vista, como señalan los registros de arcilla hitita de la época, Wilusa (Ilios) se situaba entre el poderoso imperio hitita y los denominados Ahhiyawans (posiblemente aqueos). En esta situación geopolítica, los troyanos probablemente controlaban las rutas comerciales marinas del Egeo y el mar de Mármara. Por tanto, controlaban la ruta comercial al mar Negro. Esto aportaba a la ciudad el ingreso de riquezas mediante los correspondientes impuestos para la travesía de barcos comerciales, que se trasladaban de un punto a otro de esa bullente región. Además, el control de estos pasos permitía intercambios comerciales, artísticos y científicos, entre otros.

ECUACIONES DE REACCIÓN-DIFUSIÓN: UN MODELO DE BLOQUEO MILITAR

Hoy en día, en particular, no es inusual modelar fenómenos sociales a través de sistemas dinámicos y sus correspondientes ecuaciones (Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017; Boccara, 2010; Murray, 2004). Dichas ecuaciones tienen sus orígenes, principalmente, en el área de la física llamada "fenómenos complejos" y en su subsección denominada "física no lineal" (Murray, 2004).

Desde un punto de vista práctico, asumiremos que, en la explanada donde operaron los combates de los ejércitos, las luchas eran, esencialmente, cuerpo a cuerpo. Es decir, no había tiempo de retardo (*time delay*) en la interacción. Cada ejército ocupaba diferentes dominios entendiendo que existía, además, una región de interacción y combate.

Asumiremos que el ejército troyano tiene una densidad T (individuos por unidad de área) en un dominio Ω_{τ} de superficie S_{τ} . Para el ejército griego asumimos una densidad G, dominio Ω_{G} de superficie S_{G} (Figura 2).

El sitio militar tiene una topología de inclusión, en el sentido de que un dominio está dentro del otro o, en términos de conjuntos: $\Omega_{\scriptscriptstyle G} \subset \Omega_{\scriptscriptstyle T}$ El dominio del campo de batalla denotado como $\zeta\Omega$ corresponde, en este caso particular (sitio) a la relación $\zeta\Omega = \Omega_{\scriptscriptstyle G}$ puesto que los troyanos pueden refugiarse dentro de la

ABRIL DE 2010

ciudad. Es decir, el campo de batalla está fuera de la ciudad (Figura 2). Nótese que, inspirados en problemas de teoría cinética (Deloubrière et al., 2002; Hilhorst, 2004), pueden existir otras topologías, donde $\zeta\Omega = \Omega_r = \Omega_c$ corresponde a una situación en la que no habría refugio para bando alguno y, en teoría cinética, a un volumen fijo para dos clases de reactantes.

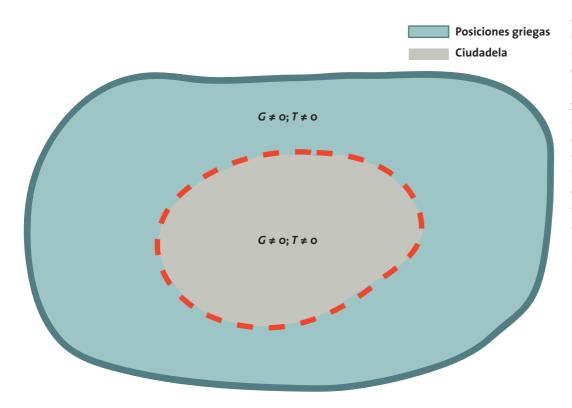


Figura 2. Un diseño territorial del sitio (bloqueo) militar asumido para la guerra de Troya. El grupo troyano ${\it T}$ ocupa las regiones de la ciudad (color plomo) y, además, el campo de los griegos ${\it G}$ (color agua marina). El grupo G no penetra en la ciudad, pero el grupo T sí puede salir de ella e interactuar en el campo de batalla (agua marina). Los muros de 8 metros de la ciudad arqueológica son considerados un elemento tecnológico a favor del grupo T.

Entonces, asumiremos para la densidad superficial de combatientes, T y G, en la guerra de Troya las ecuaciones dinámicas del tipo reacción-difusión (t tiempo):

$$\frac{\partial}{\partial t}T = -\gamma GT + D\nabla^2 T,\tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G = -\gamma'GT + D\nabla^2G. \tag{2}$$

RESPECTO DE LOS PARÁMETROS EN LAS ANTERIORES ECUACIONES:

- Los parámetros tecnológicos γ , γ' representan tasas de aniquilación de los respectivos grupos. Por ejemplo, y eventualmente, si $\gamma' > \gamma$ el grupo G tiene menos capacidad de destrucción en la beligerancia. En efecto, considerando las murallas de la ciudad de Troya como un efectivo escudo de protección, entonces los griegos tienen menor efectividad en la batalla.

- El coeficiente de difusión D representa las capacidades de movilidad en el espacio o región.

Integrando sobre los dominios correspondientes (superficie "s"), el número total de individuos de cada ejército, y en cada instante, está dado por

(a)
$$N_T(t) = \int_{\Omega_T} ds T$$
, (3)

$$(b) N_G(t) = \int_{\Omega_G} ds G.$$
 (4)

CONDICIONES DE CONTORNO Y LEY DE LANCHESTER¹

Tomaremos las condiciones sobre los bordes de dominios del tipo von Neumann. Es decir, los flujos migratorios son o (cero) en los bordes de los correspondientes dominios (Figura 2). Integrando las ecuaciones cinéticas (1) and (2) sobre esos dominios, se obtiene para el número total de individuos N_{τ} y N_{G} de cada bando, las expresiones

$$\frac{d}{dt}N_T = -\gamma \int_{\partial\Omega} ds GT \le 0,\tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}N_G = -\gamma' \int_{SO} dsGT \le 0. \tag{6}$$

Donde las integrales se hacen sobre la región de batalla $\delta\Omega$ que corresponden a los puntos de interacción entre "reactivos". Las dos ecuaciones anteriores son las herramientas esenciales para las siguientes estimaciones basadas en datos arqueológicos de la ciudad de Troya.

Es importante notar que las ecuaciones (5) y (6) poseen una constante dinámica L_o dada por la expresión

$$L_0 = \gamma N_G(t) - \gamma' N_T(t) = \gamma N_G(0) - \gamma' N_T(0), \tag{7}$$

llamada expresión de Lanchester (Taylor, 1983; Artelli y Deckro, 2008) en situaciones de conflagraciones militares. Dicha constante es aquí una consecuencia de las ecuaciones de reacción-difusión (1) y (2).

DOS COMPETIDORES: EXCLUSIÓN Y SOLUCIÓN CRÍTICA

De las ecuaciones (5) y (6), la solución de equilibrio

$$\frac{d}{dt}N_T = \frac{d}{dt}N_G = 0,\tag{8}$$

requiere necesariamente la condición matemática:

$$\int_{\delta\Omega} ds (G_{eq} T_{eq}) = 0. \tag{9}$$

La integral se realiza sobre la región de batalla. Existen tres casos según cuál sea el signo de la constante de Lanchester (7).

(a) Cuando L_o < o entonces G_{eq} = 0 en (9) y correspondiendo a la eliminación del grupo G. Entonces la distribución de equilibrio T_{eq} en (2) satisface la ecuación de Laplace con condiciones de borde de von Neumann. El teorema de unicidad garantiza la solución de equilibrio:

$$T_{eq} = -\left(\frac{\gamma}{\gamma'} N_G(0) - N_T(0)\right) / S_T.$$
 (10)

(b) En el otro caso, cuando $L_o > o$ entonces $T_{eq} = o$ (extinto) y la solución ahora es para el grupo G:

$$G_{eq} = -\left(N_G(0) - \frac{\gamma'}{\gamma}N_T(0)\right) / S_G. \tag{11}$$

¹⁻ Nos referimos a una de las dos leyes, la llamada "ley lineal".

(c) Finalmente $L_o < o$, que corresponde al caso crítico $\gamma N_G(o) = \gamma' N_T(o)$, las distribuciones de equilibrio son

$$T_{ae} = G_{ae} = 0.$$
 (12)

Lo que corresponde a un decaimiento temporalmente lento y, posiblemente, a una ley de potencias. Entonces, en este caso, de la ecuación (7) se tiene para todo instante la igualdad para el número de combatientes:

$$\frac{N_G(t)}{N_T(t)} = \frac{\gamma'}{\gamma}.$$

Esta será asumida en el proceso de la guerra de Troya. En efecto, siguiendo la épica, el conflicto parece haber durado largo tiempo. De hecho, en la obra se señala un conflicto de una generación previa entre griegos y troyanos (Homero, *Ilíada*, V, 635-645).

La Figura 3 resume las tres posibilidades relacionadas con la ley de Lanchester o, en este caso, los resultados (a), (b) o (c). El caso (a), donde el grupo T resulta ganador, corresponde a la región sobre la línea crítica (verde). Es decir, los grupos beligerantes parten del punto rojo, a la izquierda de la línea verde, y evolucionan según la flecha curvada a un punto sobre el eje T. De la misma forma, el caso (b), con G como ganador, está a la derecha de esa línea verde, evolucionando a partir del punto azul hacia el eje G. Finalmente, la pendiente de la curva crítica (verde) es γ^*/γ . En este caso (c), la dinámica es lenta (ley de potencia) y ambos grupos desaparecen. Para la guerra de Troya, se asume este caso crítico (c) como el dominante.

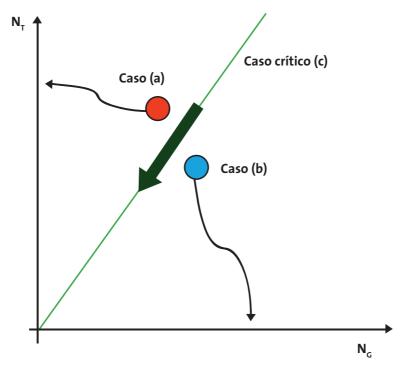


Figura 3. Las ecuaciones de difusión (1-2) para los grupos combatientes TyG tienen una dinámica relacionada con tres regiones En la región (a), a la izquierda de la línea verde, partiendo de un punto en ella (rojo) la dinámica de la interacción termina con el grupo G como extinto ($N_G = o$). Opuesto, en la región a la derecha (b), partiendo de un punto en ella (azul), es el grupo T que termina finalmente extinto ($N_T = o$). Sobre la línea verde, caso crítico (c), ambos grupos se extinguen. Esta dinámica crítica es lenta con una ley de potencia para su evolución temporal. Se asumirá que la guerra de Troya corresponde a esta dinámica (c).

SIMULACIONES NUMÉRICAS

El conjunto de ecuaciones (1-2) puede ser tratado, numéricamente, con diferencias finitas. Aquí presentamos dichas soluciones formales para la evolución temporal y difusión en dimensión uno y dos de las respectivas densidades T y G. Las unidades son arbitrarias. La ventaja de estas simulaciones es que permiten visualizar la evolución formal del sistema dinámico. En esta sección, el énfasis se pone en la dinámica asociada a las ecuaciones (1-2) de reacción-difusión. En la próxima sección se considerará el caso de Troya.

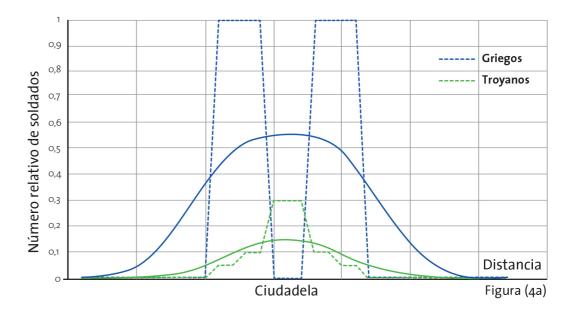
ABRIL DE 2019

En estos cálculos, la razón usada para el número inicial de combatientes es

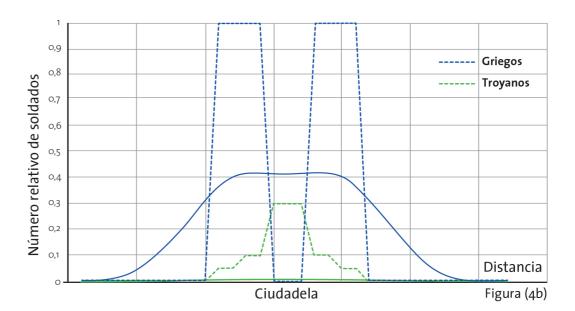
$$\frac{N_G}{N_T} \approx 5. \tag{14}$$

Los parámetros tecnológicos γ , γ' van cambiando en las tres primeras simulaciones consideradas a continuación (dimensión uno).

La Figura 4a muestra las condiciones iniciales usadas (líneas de puntos, azul y verde). Por simplicidad hemos asumido que las fuerzas militares ocupan todo el espacio; pero de preferencia los troyanos se encuentran en el centro y los griegos en torno de ellos. En esta figura, las curvas continuas muestran el proceso de difusión sin interacción (γ , γ'), a modo de referencia para las otras figuras. Claramente, los grupos difunden (líneas continuas) espacialmente a partir de las condiciones iniciales asumidas (líneas de puntos).

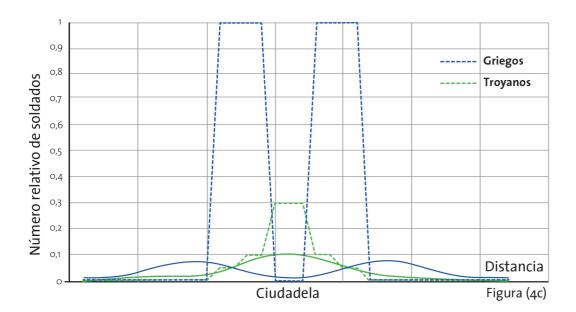


La Figura 4b corresponde al caso hipotético donde los parámetros tecnológicos son iguales. Particularmente $\gamma = \gamma' = 0,3$. En este caso, las fuerzas troyanas desaparecen puesto que, tecnológicamente, ambos bandos tienen las mismas armas, pero el ejército griego es más numeroso (14).

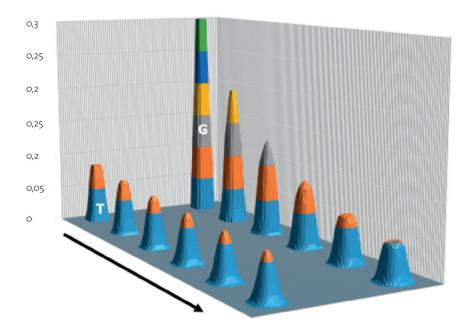


La Figura 4c muestra la existencia de una superioridad tecnológica de T frente a G ($\gamma = 0.3$ y $\gamma' = 3$), y los troyanos tienden a equiparar, con el tiempo, a los griegos. Es decir, las murallas de la ciudad de Troya son efectivamente una ventaja tecnológico-militar.



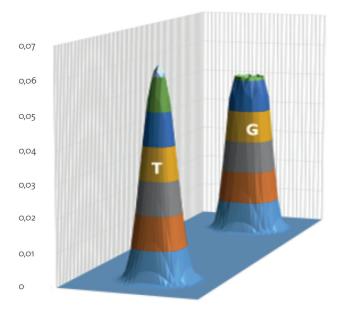


Finalmente, las Figuras 5a y 5b muestran la evolución temporal en dimensión dos con $\gamma=$ 0,3 y $\gamma'=$ 3 (comparar con Figura 4c), donde los troyanos, aun teniendo menos soldados, poseen una ventaja tecnológica que compensa la situación. Las densidades T y G están superpuestas en la interacción sobre el campo de batalla. Sin embargo, por simplicidad en las figuras, las mostramos separadas y de a pares.



La **Figura 5a** muestra la evolución temporal (1-2) de las densidades de soldados para distintos instantes (flecha negra).

Figura (5a)



de individuos (zoom de últimos "conos" en la Figura 5a).

La **Figura 5b** muestra el último computo, o tendencia, de la evolución de la densidad

Figura (5b)

NÚCLEOS # 6

LA (HIPOTÉTICA) GUERRA DE TROYA

En el siglo VIII a. C., el poeta Homero en la épica la *llíada* relata una antigua y larga conflagración de diez años entre el bando griego y el troyano, pero no se menciona explícitamente un ganador. De hecho, el poema termina con la muerte del héroe troyano Héctor y sus funerales. La historia del caballo de Troya y la devastación de Troya no aparecen en la mencionada épica. Naturalmente, un sitio militar de diez años parece poco probable, pero sí una larga beligerancia que dependía, periódicamente, de las estaciones climatológicas y, por tanto, de las provisiones de comidas y resguardos del clima. Además, para romper el sitio militar, los troyanos posiblemente realizaban alianzas con facciones amigas en su entorno (*Ilíada*, II, 800-805). En este sentido, la situación sin un ganador explícito (IV, 415-420) sugiere que no fue un sitio militar perfecto. Entonces, una dinámica temporal lenta de ley de potencias parece razonable. Teniendo en cuenta la relación (13), el poema (II, 120-130) entrega una proporción entre el número guerrero de ambos bandos. Dicha proporción es de una razón de diez griegos por cada troyano. Es decir, teniendo en cuenta la ecuación (13), tendríamos la razón entre parámetros (γ' / γ)

Por otro lado, si asumimos el número inicial de griegos como N_c (0) ≈ 50000 [7] (Homero, *llíada*, 2004) y el número inicial de troyanos $N_{\tau}(0) \approx 6000$ [2] (Korfmann, 1995), entonces, de (13) se obtiene la razón (γ' γ) \approx 8,3 en buen acuerdo con la referencia relacionada con las murallas, miradas como un escudo protector de ocho metros (Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017). Todo en concordancia, razonable, con la épica.

Puesto que de los 44 líderes griegos, 10 fueron muertos en el conflicto (Homero, *Ilíada*, 2004; Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017), entonces, proporcionalmente, de los presuntos 50000 griegos al inicio del conflicto se puede asumir que quedaron finalmente del orden de $N_c \approx 38636$. Ahora, usando la ecuación (13), necesariamente el número final de troyanos puede estimarse como N_{τ} (10) \approx 38636 / 8,3 \approx 4655 . Todo esto se encuentra en correspondencia con una predicción relacionada con este artículo y otros ya citados (Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017).

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos considerado un modelo cinético del tipo reacción-difusión para describir la dinámica de la hipotética guerra de Troya, que habría tenido lugar en torno del 1200 a. C. Basándonos en datos arqueológicos, la épica y nuestros trabajos previos (Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017), la estimación de la razón entre los parámetros tecnológicos resulta ser γ' / $\gamma \approx 8,3$. Esta cifra fue usada para realizar estimaciones en cuanto al número de soldados que intervinieron en el conflicto.

En este sentido, la regla de Lanchester (13), obtenida aquí como un resultado, nos permitió estimar el número final de guerreros troyanos (del orden de los 4655). Esta evaluación fue realizada según la proporción de líderes griegos muertos en el conflicto (Homero, *Ilíada*, 2004).

Desde un punto de vista tecnológico-militar, la diferencia entre troyanos y griegos la marcaron esencialmente las famosas murallas de ocho metros (Figura 1). Desde un punto de vista táctico, este formidable y efectivo escudo puede ser comparado con los usuales "aspis" (ejército griego) de alrededor de un metro de alto. Es decir, la relación $\gamma'/\gamma \approx 8$ parece razonable (Flores y Bologna, 2013; Flores, 2017). Consecuentemente, usando (13) y el dato arqueológico de 6000 troyanos para la capacidad de la ciudadela (Korfmann, 1995) al inicio de conflicto, no es disparatado considerar un número inicial de soldados griegos del orden de 50 000 (Homero, Ilíada)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artelli, M. J. y Deckro, R. F. (2008) "Modeling the Lanchester Laws with System Dynamics". Journal of Defense Modeling and Simulation: Applications, Methodology, Technology 5(1), 1-20.
- Boccara, N. (2010) *Modeling Complex Systems* (2.^{da} ed.). Springer Berlín.
- Deloubrière, O.; Hilhorst, H. J. y Täuber, U. C. (2002) "Multispecies Pair Annihilation Reactions". *Physical Review Letters* 89(25), 250601.
- Flores, J. C. y Bologna, M. (2013) "Troy: A simple nonlinear mathematical perspective". *Physica A* 392(19), 4683-4687.
- Flores, J. C. (2017) "Trojan war displayed as a full annihilation-diffusion-reaction model". *Physica A* 467, 432-435.
- Heuck Allen, S. (1999) Finding the Walls of Troy: Frank Calvert and Heinrich Schliemann at Hisarlik. University of California Press.
- Hilhorst, H. J.; Washenberger, M. J. y Täuber, U. C. (2004) "Symmetry and species segregation in diffusion-limited pair annihilation".
 Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, P10002.
- Homero, Ilíada. Antonio López Eire (trad.). Cátedra, Letras Universales, 2004.

- Kolb, F. (2004) "Troy VI: A Trading Center and Commercial City?". American Journal of Archaeology, 108(4), 577-613.
- Korfmann, M. (1995) "Troia: A residential and trading city at the Dardanelles". *Aegaeum* 12, 173-183.
- Korfmann, M. (2004) "Was there a Trojan war?". *The Archaeological Journal*. 57(3).
- Maher, M. (2003) "Fall of Troy VII: New Archaeological Interpretations and Considerations". *Totem: the University Western Ontario Journal of Anthropology*, 11, Iss.1, article 8.
- Murray, J. D. (2004) Mathematical Biology (3.ra ed.). Vol. I y II, Springer.
- Rose, C. B. (2004) "Assessing the Evidence for the Trojan Wars".
 Archaeological Institute of America (AIA). Recuperado de https://www.archaeological.org/pdfs/papers/AIA_Troy.pdf.
- Taylor, J. G. (1983) Lanchester Models of Warfare, Volume 1, (54-62).
 Washington DC: Operations Research Society of America.

Juan César Flores Araya (cflores@uta.cl) es doctor en Ciencias por la Universidad de Ginebra, Suiza, y profesor titular de la Universidad de Tarapacá en Arica, Chile. Sus actividades de investigación se relacionan con campos de la física matemática y modelamiento matemático de sistemas biológicos y arqueológicos. Tiene más de sesenta publicaciones internacionales en revistas de corriente principal (ISI).