



UNNOBA

# NÚCLEOS

Revista científica

# 8

JULIO DE 2021



## SESQUICENTENARIO

DE LA TABLA PERIÓDICA DE MENDELÉYEV

**REPRESENTACIÓN  
PARLAMENTARIA POR  
ASOCIACIÓN Y POR  
PARTIDO: ANÁLISIS  
COMPARADO DE LA  
SITUACIÓN DE LA  
REPÚBLICA DE WEIMAR  
Y LA REPÚBLICA FEDERAL  
ALEMANA**

CLAUDIO A. CONTRERAS

**SESQUICENTENARIO DE  
LA TABLA  
PERIÓDICA DE  
MENDELÉYEV**

OSCAR E. PIRO

**GAVIOLA  
Y EL LÁSER**

MARIO GARAVAGLIA

**EL MODELO ESTÁNDAR  
DE LA COSMOLOGÍA  
MODERNA EN JAQUE**

LUIS A. ANCHORDOQUI

## AUTORIDADES ACADÉMICAS

*Rector: Dr. Guillermo R. Tamarit*

*Vicerrectora: Mg. Danya V. Tavela*

*Guardasellos: Ing. Luis J. Lima*

*Secretaria Académica: TP. Pilar Traverso*

*Secretaria de Investigación, Desarrollo y Transferencia: Dra. Carolina Cristina*

*Secretario de Extensión: Lic. Juan Pablo Itoiz*

*Secretario General: Cdora. Mariana Passarello*

*Secretaria Económico Financiera: Cdora. Mariela García*

*Secretaria de Cultura: Lic. Laura Durán*

*Secretario de Relaciones Institucionales: Cdor. Martín Palma*

*Directora Centro de Edición y Diseño: Mg. Ma. de las Mercedes Filpe*

DIRECTOR DE LA REVISTA

*Dr. Ángel L. Plastino*

---

## SUMARIO

### #8 SESQUICENTENARIO DE LA TABLA PERIÓDICA DE MENDELÉYEV

#### PÁG. 6

REPRESENTACIÓN PARLAMENTARIA POR ASOCIACIÓN Y POR PARTIDO: ANÁLISIS COMPARADO DE LA SITUACIÓN DE LA REPÚBLICA DE WEIMAR Y LA REPÚBLICA FEDERAL ALEMANA

CLAUDIO A. CONTRERAS

#### PÁG. 20

SESQUICENTENARIO DE LA TABLA PERIÓDICA DE MENDELÉYEV

OSCAR E. PIRO

#### PÁG. 36

GAVIOLAY ELLÁSER

MARIO GARAVAGLIA

#### PÁG. 55

EL MODELO ESTÁNDAR DE LA COSMOLOGÍA MODERNA EN JAQUE

LUIS A. ANCHORDOQUI

---

#### Edita



CEDI Centro de Edición y Diseño. UNNOBA  
Calleao 289 3.º piso, CP. 1022  
Tel 54 11 53531520. Ciudad Autónoma  
de Buenos Aires, Argentina

#### Diseño y diagramación

CEDI Centro de Edición y Diseño

Año 6 N.º 8

Julio de 2021

Publicación semestral

ISSN 2408-4492

Queda hecho el depósito

que marca la ley 11723

#### Sede Junín

Libertad 555, CP. 6000

Tel 54 236 4407750

Junín, prov. de Buenos Aires, Argentina

#### Sede Pergamino

Monteagudo 2772, CP. 2700

Tel 54 2477 409500.

Pergamino, prov. de Buenos Aires, Argentina

Se invita a potenciales colaboradores  
a remitir sus trabajos al CEDI  
(cedi@unnoba.edu.ar)

[www.unnoba.edu.ar](http://www.unnoba.edu.ar)



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento - NoComercial - SinObraDerivada 4.0 Internacional.



## CONSEJO EDITORIAL

**Dr. Plastino, Ángel R.**  
UNNOBA

**Dr. Tamarit, Guillermo R.**  
UNNOBA

**Mg. Tavela, Danya V.**  
UNNOBA

**Dra. Cristina, Carolina**  
UNNOBA

**Mg. Filpe, Ma. de las Mercedes**  
UNNOBA

## ARBITRAJE

La nuestra es una revista de divulgación que publica artículos originales, en el sentido de que no han aparecido antes en ningún otro medio.

Por ser una revista de divulgación, nuestra principal preocupación es que sus artículos sean accesibles a un público con formación universitaria. No juzgamos tanto el contenido como su accesibilidad.

Todos los artículos son arbitrados por el Consejo Editorial. La mayoría de ellos son el resultado de invitaciones especiales a reconocidos expertos en la áreas abordadas. Se aceptan también presentaciones espontáneas que se someten a riguroso escrutinio que aquí sí se centra en el contenido.

---

## OBJETIVOS Y METAS

Existe gran retraso en el desarrollo de la divulgación de la ciencia y del pensamiento académico en general, en relación con los vertiginosos avances que se han registrado en estos últimos años. Esto ocasiona un pernicioso desfase entre la sociedad y sus científicos y académicos. Por ello resulta muy importante intentar llevar variados aspectos de la concomitante actividad al público, en formato accesible.

Esto constituye a la vez un desafío y una necesidad social. Para satisfacerla, *NÚCLEOS* propone que los propios científicos y académicos traten de ayudar a los ciudadanos a valorar su trabajo. *NÚCLEOS* pretende que nuestros autores-creadores acerquen a sus lectores una visión actualizada de recientes desarrollos, en particular aquellos que se originan en el país. Nos interesa ayudar a apreciar la relevancia del pensamiento creativo, acercándolo en forma directa desde y por sus protagonistas.

Fantásticas innovaciones y grandes sorpresas nos brindan hoy las ciencias y otras disciplinas académicas, con enormes consecuencias tecnológicas y humanas. Beneficia el desarrollo cultural de un pueblo que cierto tipo de investigaciones, hallazgos, descubrimientos y experimentos puedan ser transmitidos al público. Este forma parte de la sociedad de la Información pero, en general, conoce muy poco sobre ciencia y tecnología, a pesar de que estas estén cambiando al mundo, transformando de modo radical la vida cotidiana. *NÚCLEOS* intenta, de forma modesta pero esperamos que eficaz, que se acerquen al público elementos esenciales del desarrollo actual del conocimiento.

# EDITORIAL

Estimados lectores:

Les acercamos el número 8 de nuestra revista, con cuatro artículos de variada temática que esperamos han de concitar interés.

El primero discute un tema fundamental en la historia de Occidente: el de la representación parlamentaria como forma de poder político. Se estudia el problema comparando la fallida República de Weimar de la década de 1920 con las bases constitucionales de la exitosa República Federal alemana de hoy.

Por otra parte, recientemente se cumplieron 150 años de uno de los hitos más importantes en la historia de la Ciencia: la creación de la tabla periódica, base de la química. Usamos hoy en el planeta 71 millones de sustancias químicas, de las que solo menos de 400 son naturales. El resto son artificiales y no existirían sin la tabla. Este es el tema del segundo artículo.

El láser es hoy un dispositivo fundamental en nuestras vidas, con todo tipo de aplicaciones en la vida cotidiana. El tercer artículo nos habla sobre la crítica participación de un físico de Argentina en los comienzos de la tecnología del láser.

Finalmente, cerramos con un trabajo sobre el marco teórico-conceptual en el que se basa la cosmología contemporánea, el llamado modelo estándar cosmológico, que enfrenta hoy serios problemas.

En suma, los artículos que tiene el lector a la vista son:

1. Representación parlamentaria por asociación y por partido: análisis comparado de la situación de la República de Weimar y la República Federal Alemana, de Claudio Contreras.
2. Sesquicentenario de la tabla periódica de Mendeléyev, de Oscar E. Piro.
3. Hacia una nueva historia del láser. Algo de “física ficción”: el láser “a lo Gaviola”, de Mario Garavaglia.
4. El modelo estándar de la cosmología moderna en jaque, de Luis A. Anchordoqui.

Confiamos los disfruten.

**Dr. Ángel Luis Plastino**  
Director revista NÚCLEOS

MARIO J. GARAVAGLIA

ES DOCTOR EN FÍSICA (UNLP). SE DEDICÓ A LA INVESTIGACIÓN EN ÓPTICA Y FOTÓNICA. COMPLETÓ SU TESIS DOCTORAL EN LA UNIVERSIDAD DE UPPSALA, SUECIA, SOBRE LA ESPECTROSCOPIA DE LA EMISIÓN DEL LÁSER DE HG. ES PROFESOR EMÉRITO DE LA UNLP E INVESTIGADOR SUPERIOR (CONTRATADO AD HONOREM) DEL CONICET. HA RECIBIDO NUMEROSOS PREMIOS Y DISTINCIONES.

# GAVIOLA Y EL LÁSER

**PALABRAS CLAVES.**  
**LÁSER, EMISIÓN**  
**ESTIMULADA, GAVIOLA**

**RESUMEN.** Enrique Gaviola (1900-1989) fue uno de los primeros físicos de Argentina y un destacado científico con contribuciones a la física y astronomía. Entre sus logros se destacan 1) la recuperación del Observatorio Astronómico de Córdoba, 2) la fundación de la Asociación Física Argentina y 3) de la FAMAFA en la Universidad Nacional de Córdoba. Este artículo gira en torno a su trabajo experimental sobre emisión estimulada, que fue antecedente de lo que hoy se conoce como la ciencia del láser.

**ABSTRACT.** Enrique Gaviola (1900-1989) was one of the first Argentinian physicists and a distinguished scientist who contributed significantly to physics and astronomy. Among his achievements are the following: 1) restoration of Córdoba Astronomical Observatory, 2) foundation of Argentine Physics Association, and 3) creation of the FAMAFA in the National University of Córdoba. The present article is about his experimental work on stimulated emission, a precedent for what nowadays is known as laser science.

**KEYWORDS.** LASER,  
STIMULATED  
EMISSION, GAVIOLA



## EXORDIO

Todo comenzó cuando Eduardo Quel le sugirió a Mario Gallardo tratar la relación “Gaviola y el láser”. Eduardo Quel le pasó a Mario Gallardo las publicaciones de Gaviola, y Mario Gallardo propuso una reunión en el CIOp. Nos reunimos el 11 de marzo de 2020. De ella surgió mi interés por estudiar críticamente todas las publicaciones de Gaviola. A su vez Gallardo y Quel me propusieron escribir sobre el asunto. Y este es el texto que escribí.

# 1.

## EL “CUERPO NEGRO” Y LAS FORMULACIONES DE PLANCK

El 7 de enero de 1901 Max Planck publicó la justificación de la validez de la fórmula que había presentado el 19 octubre de 1900 (Planck, 1900), proponiendo el modo en que irradia el “cuerpo negro”. La irradiancia espectral del “cuerpo negro” depende de su temperatura absoluta  $T$  y de la longitud de onda  $\lambda$  a lo largo del espectro electromagnético, y, para su cometido, Planck introdujo a) la idea de que la radiación del cuerpo negro no puede ser explicada por la teoría electromagnética y b) la idea de que la radiación del cuerpo negro es emitida en cantidades discretas, de manera discontinua, denominando *quantum* a cada cantidad emitida.

La fórmula de Planck para la irradiancia espectral, que publicó el 19 de octubre de 1900, fue:

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} [e^{-(C''/\lambda T)} - 1],$$

y en la que  $C'$  y  $C''$  son constantes *ad hoc*, en principio, para ajustar la expresión a los puntos experimentales obtenidos previamente por otros investigadores (Rubens y Kurlbaum, 1900).

La palabra latina *quantum* en alemán indica ‘cantidad’, ‘dosis’. Y la energía de un *quantum* de la emisión del cuerpo negro, Planck la expresó como  $E = h\nu$ , siendo  $\nu$  la frecuencia de la radiación electromagnética.  $\nu$  se relaciona con la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación por la expresión  $\lambda\nu = c$ , siendo  $c$  la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío. Planck pudo evaluar la constante  $h$  y, a partir de ella, obtener el valor de  $h$ , según las mediciones de la irradiancia espectral del “cuerpo negro” en función de temperatura absoluta  $T$  y la longitud de onda  $\lambda$ ; (Planck, 1901). El valor de  $h$  fue  $6,55 \times 10^{-27}$  ergio por segundo, en las unidades usadas por entonces, pertenecientes al sistema de unidades CGS (centímetro, gramo, segundo), equivalente en la actualidad a las unidades del Sistema Internacional a  $6,55 \times 10^{-34}$  J s (joule por segundo). A la constante  $h$  se la ha llamado “constante de Planck”, y su valor numérico fijo es  $6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$  J s con una incertidumbre relativa de  $1 \times 10^{-8}$ , según la Resolución 1 de la 26.ª Conferencia Internacional de Pesas y Medidas (CIPM) reunida en Versalles, Francia, del 13 al 16 de noviembre de 2018. A su vez, Einstein en 1916 pudo evaluar la constante  $C$ , y obtener  $C = 8\pi h\nu^3/c^3$ . Luego Arnold Sommerfeld estableció que  $A/B = 8\pi h\nu^3/c^3$  (Sommerfeld, 1956). Planck recibió el Premio Nobel de Física en 1918 “en reconocimiento de los servicios que brindó al avance de la física por su descubrimiento de la cuantificación de la energía (*energy quanta*)”.

## 2. MAX PLANCK Y ALBERT EINSTEIN

Planck tenía 42 años cuando estableció su fórmula  $E = h\nu$ , la cual no fue, en general, bien recibida. No obstante, Albert Einstein, con 21 años, la aplaudió porque se dio cuenta de que era una herramienta que permitiría resolver problemas pendientes. Entre ellos el famoso experimento de Heinrich Rudolf Hertz, <sup>1</sup> quien en 1887 descubrió el efecto fotoeléctrico al observar que una esfera metálica cargada eléctricamente se descargaba de inmediato por iluminación ultravioleta pero no por iluminación visible, asunto que no pudo resolverse por entonces dentro del modelo de interacción electromagnética. Ese tema fue atacado por Einstein con la novedosa herramienta cuántica de Planck y, en 1905, publicó su solución interpretativa del efecto fotoeléctrico. Esta publicación corresponde al primer manuscrito de cinco que envió al *Annalen der Physik*, por lo que 1905 fue denominado su *annus mirabilis*. <sup>2</sup> Einstein recibió el Premio Nobel de Física en 1921 “por sus servicios a la física teórica y especialmente por su descubrimiento de la ley del efecto fotoeléctrico”.

## 3. LA LEY DE WIEN, O DEL “CORRIMIENTO DEL MÁXIMO”

Pero ¿qué hizo posible que esta novedad cuántica, amasada entre los siglos XIX-XX, inaugurara el siglo XX con desarrollos teóricos y comprobaciones experimentales inimaginables? Todo comenzó con el intento por evaluar la “emisión del cuerpo negro”. Su emisión espectral se caracteriza por ser un continuo. No aparecen líneas espectrales características como las emitidas por los átomos de hidrógeno o de sodio, por ejemplo. Además, la experiencia indica que al aumentar la temperatura de un cuerpo —un alambre de hierro calentado a la llama, por ejemplo— se observa que aumenta la cantidad de energía que irradia, volviéndose cada vez más brillante, y que varía su matiz desde el rojo hasta la incandescencia, hasta la temperatura que soporten los materiales, como 1500 °C. Este fenómeno físico ha permitido introducir las primeras leyes que lo describen cuantitativamente a partir de los datos experimentales. La ley de Wien, o del “corrimiento del máximo” (formulada en 1893), relaciona la temperatura absoluta  $T$  del cuerpo negro, en grados kelvin (K), con la longitud de onda  $\lambda_{\text{Máx}}$  a la que ocurre el máximo de la emisión dentro de su espectro continuo, así:

$$T = 2\ 897,79 / \lambda_{\text{Máx}}$$

teniendo la constante numérica 2897,79 dimensiones de longitud de onda por temperatura, nm K (nanómetros por kelvin). Wilhelm Wien recibió el Premio Nobel de Física en 1911 “por sus descubrimientos sobre las leyes que gobiernan la radiación térmica”.

Además, la ley de Stefan-Boltzmann, que relaciona la energía total irradiada  $I_e(T)$  por unidad de área y de tiempo, para todas las longitudes de onda, desde 0 hasta  $\infty$ , con la temperatura absoluta del cuerpo negro elevada a la cuarta potencia,  $T^4$ , así:

$$I_E(T) = \int I_E(\lambda, T) \cdot d\lambda = \sigma T^4,$$

siendo  $\sigma = [2\pi^5 k^4 \cdot [15h^3 c^2]^{-1}] = 5,670\ 32 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$ , la “Constante de Stefan”, donde  $k$  es la “Constante de Boltzmann”, cuyo valor actual es:  $1,380\ 649 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ , según la Res. 1 de la 26.º CIPM. Esta ley fue obtenida por razonamientos termodinámicos por Ludwig Eduard Boltzmann y mediante observaciones experimentales por Josef Stefan. Su resultado final fue la igualación de los términos primero y último de la fórmula precedente, con lo que, desde 1895, la cuestión planteada fue tratar de obtener la expresión de  $I_E(\lambda, T)$ .

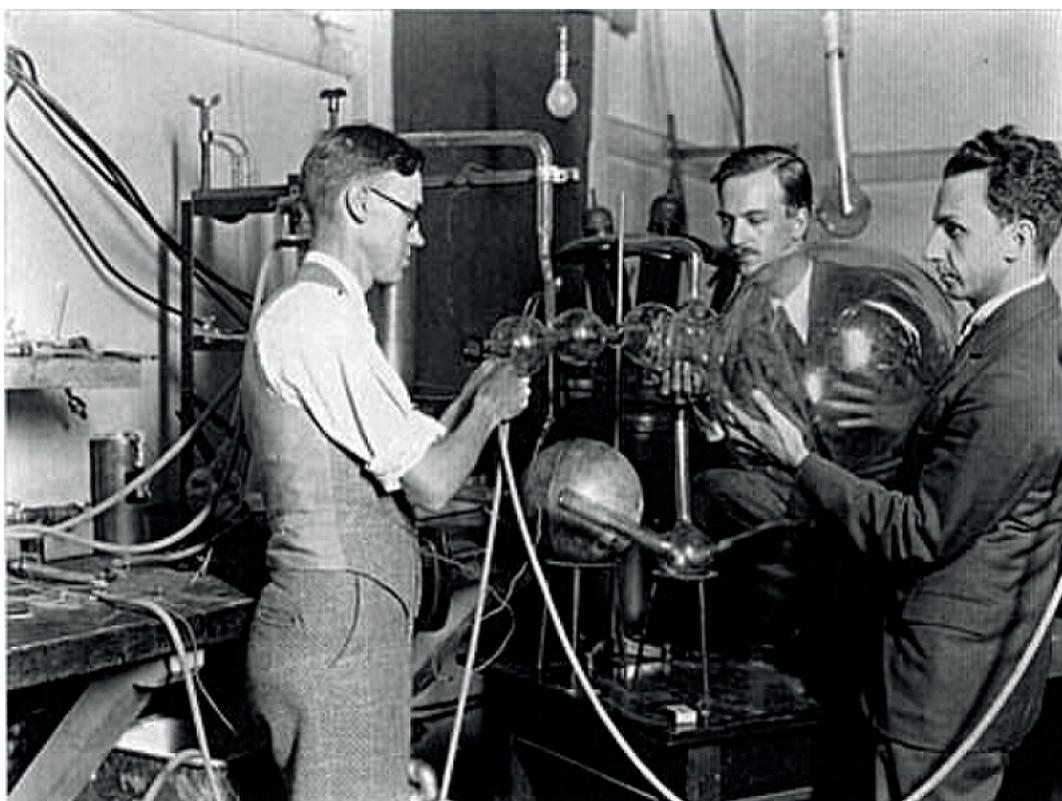


Imagen publicada por *The Sunday Star* de Washington el 11 de noviembre de 1928. En ella se puede ver a Hafstad, a Tuve y al joven Gaviola de entonces.

El propio Wilhelm Wien, en 1896, obtuvo como resultado de cálculos termodinámicos, la siguiente expresión para la irradiancia espectral del cuerpo negro:

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} e^{-(C''/\lambda T)},$$

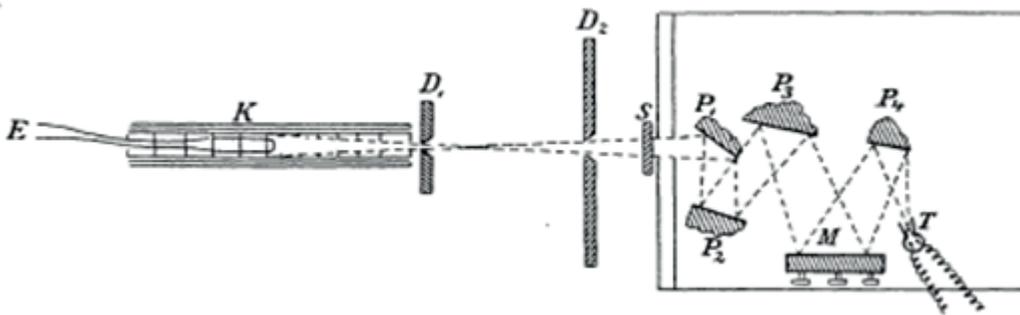
en la que  $C'$  y  $C''$  son constantes *ad hoc*. Esta misma fórmula también fue obtenida por Planck, en 1899, pero a partir de cálculos electromagnéticos. Esta expresión matemática cumple con la condición integral de la ley de Stefan-Boltzmann, pero convenía que fuera convalidada por mediciones experimentales.

Friedrich Paschen<sup>3</sup> se propuso corroborar experimentalmente los resultados de Wien (1896) y de Planck (1899); sus primeras mediciones fueron publicadas en 1896 y 1897 (Paschen, 1896; Paschen, 1897), y, con la asistencia de H. Wanner, las completó en 1899 (Paschen y Wanner, 1899). Observaron la emisión de cuerpo negro de una cavidad constituida por un pequeño tubo de doble pared que contenía una termocupa de Le Chatelier consistente en una juntura de Pt-(Pt 90 % + Ro 10 %), la que al ser calentada por la aplicación de una diferencia de potencial adquiere temperaturas cuyos valores son directamente proporcionales a la corriente eléctrica que circula a través de ella. Además, observaron la  $I_E(\lambda, T)$  a cortas longitudes de onda, en la región espectral del ultravioleta y visible, y a bajas temperaturas; no pasaron de los 600 °C. Las longitudes de onda en valores seleccionados del espectro fueron determinadas con espectrógrafos a red de difracción y las irradiancias correspondientes de la emisión espectral fueron determinadas por el calentamiento producido en otra termocupa de Le Chatelier conectada a un galvanómetro muy sensible. Con todo ello, el producto  $\lambda T$  se lograba con gran exactitud. Su dictamen final sobre la fórmula de Wien (1896) y la de Planck (1899) para  $I_E(\lambda, T)$ , si bien no representaba exactamente los puntos experimentales, (Figura 2), según la expresión de Planck (1901), *resultaba ser correcta*.

La respuesta de otros investigadores no se hizo esperar. Unos tratando de extender los límites de

las observaciones tanto en la amplitud espectral cuanto al rango de temperaturas y otros tratando de formular heurísticamente expresiones de  $I_E(\lambda, T)$  que se ajustaran mejor a los puntos experimentales.<sup>4</sup>

Otto Lummer y Ernst Pringsheim, en 1889 y en 1900, optaron por observar un amplio rango de longitudes de onda, particularmente en el infrarrojo (IR) medio y lejano, y con elevadas temperaturas. El esquema experimental es formalmente semejante al de Paschen. Para la determinación de las temperaturas, la termocupla de Le Chatelier era confiable hasta los 1500 °C, pero no podían emplear redes de difracción; por entonces las redes de difracción en la región del infrarrojo extendido no tenían un buen comportamiento, lo que dificultaba la medición de longitudes de onda. Por ello decidieron emplear una técnica observacional que, desde hacía una década, rendía buenos frutos. Se trata de la técnica de los rayos residuales.<sup>5</sup>



**Figura 1.** Reproducción del experimento original de Lummer y Pringsheim.

E: Voltaje aplicado. K: Cavidad con una termocupla que actúa como cuerpo negro. D: Diafragmas de doble pared refrigerados por agua a 20 °C. S: Obturador. M: Espejo cóncavo de vidrio recubierto con un depósito de plata. P: Planos de fluorita o de cloruro de sodio para usar el método de los rayos residuales. T: Termocupla de Le Chatelier de Pt-(Pt 90 %+Ro 10 %) usable hasta los 1500 °C conectada a un galvanómetro muy sensible.

Los cristales de fluorita ( $\text{CaF}_2$ ) y de sal común ( $\text{NaCl}$ ), si bien son transparentes en amplias regiones espectrales, poseen algunas bandas en el infrarrojo profundo que ofrecen reflexiones metálicas, en el rango de longitudes de onda de 12 a 32  $\mu\text{m}$ . Luego, en un dispositivo selector de longitudes de onda, empleando cuatro superficies sucesivas de fluorita o de sal común pulidas a espejo, las componentes transmitidas de la irradiancia del cuerpo negro,  $I_E(\lambda, T)$ , se iban debilitando mientras resaltaban las componentes reflejadas (Figura 1). De esta manera lograron obtener valores del producto  $\lambda T$  lo suficientemente confiables como para concluir que la fórmula de Wien (1896) y la de Planck (1899) para  $I_E(\lambda, T)$ , en el infrarrojo, hasta  $\lambda = 18 \mu\text{m}$ , y para temperaturas elevadas, hasta 1200 °C, se apartaba definitivamente de los puntos experimentales, por lo que *resultaba ser incorrecta*.

Los que fueron por la vía heurística no insistieron demasiado en razonamientos inductivos o deductivos, sino que buscaron una solución adecuada a través de fórmulas que mejor cubrieran los puntos experimentales. Así, las fórmulas fueron:

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} (\lambda T)^{1/2} e^{-(C'/\lambda T)}, \text{ M. Thiesen (1900),}$$

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} (\lambda T) e^{-(C'/\lambda T)}, \text{ Lord Rayleigh (1900),}$$

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} (\lambda T) e^{-(C'/(\lambda T)^{3/4})}, \text{ O. Lummer y J. Jahnke (1900),}$$

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} [e^{-(C'/\lambda T)} - 1], \text{ M. Planck (1900),}$$

y en las que  $C'$  y  $C''$  son constantes *ad hoc*, en cada caso diferentes, para ajustar las expresiones a los puntos experimentales obtenidos. Cabe destacar que todas estas fórmulas cumplen con la condición integral de la ley de Stefan-Boltzmann.

Lummer y Pringsheim presentaron sus resultados en dos publicaciones en 1899 y una tercera a

comienzos de 1900. Frente a tales resultados Heinrich Rubens y Ferdinand Kurlbaum (1900) decidieron intervenir con otro experimento, semejante al de Lummer y Pringsheim, pero con las siguientes mejoras:

a) Las temperaturas  $T$  del cuerpo negro se iniciaban a los  $-188\text{ }^{\circ}\text{C}$  (aire líquido gasificado), pasaba por los  $-80\text{ }^{\circ}\text{C}$  (mezcla de hielo seco y alcohol isopropílico) y se extendían hasta los  $1500\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

b) Emplearon siete superficies sucesivas de fluorita o de sal común pulidas a espejo para medir las componentes transmitidas de la irradiancia del cuerpo negro,  $I_E(\lambda, T)$ , en longitudes de onda de  $24,0$ ;  $31,6$  y  $51,2\text{ }\mu\text{m}$ .<sup>6</sup>

c) Incorporaron superficies de cuarzo para medir en  $8,85\text{ }\mu\text{m}$ .<sup>7</sup> Con todas estas mejoras obtuvieron productos  $\lambda T$  muy confiables y pudieron verificar la validez, o no, de las fórmulas de Wien (1896), de Planck (1899), de Thiesen (1900), de Lord Rayleigh (1900) y de Planck (1900). Sus conclusiones fueron definitivas; solo las fórmulas de 1900 de Lord Rayleigh y de Planck se ajustaban casi perfectamente a todos los puntos experimentales (ver Figura 2):

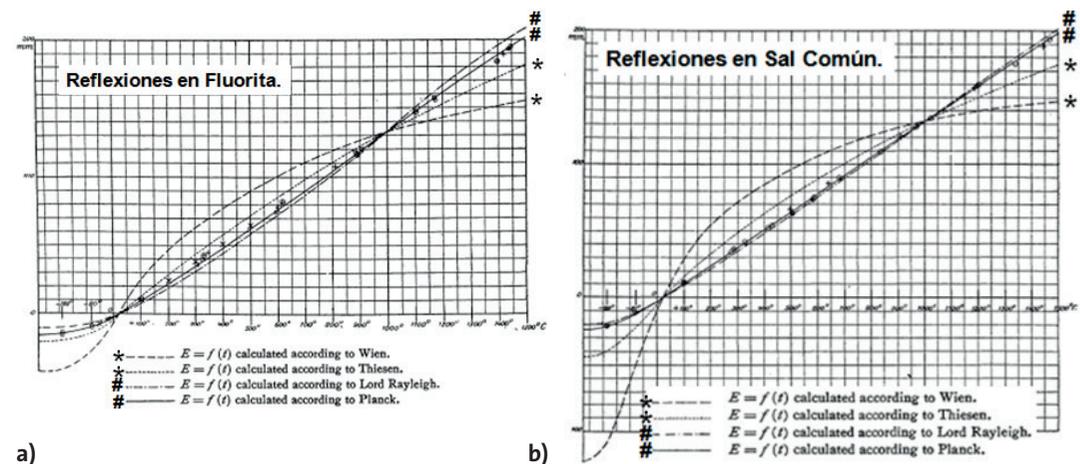


Figura 2. Gráficos originales de Rubens y Kurlbaum (1900). a) Reflexiones en fluorita. b) Reflexiones en sal común.

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} (\lambda T) e^{-(C'/\lambda T)}, \text{ Lord Rayleigh,}$$

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} [e^{-(C'/\lambda T)} - 1], \text{ M. Planck.}$$

No obstante, Rubens y Kurlbaum tomaron partido por la fórmula de M. Planck y lo mejor es leer sus propios términos al cierre de su publicación: “Por tanto, en lo que respecta a la representación de los resultados de Lummer y Pringsheim, así como a los propios, las fórmulas de lord Rayleigh (1900) y M. Planck se adaptan de manera excelente, pero la expresión de Planck, en la medida en que hace lo mismo, merece preferencia por su sencillez”.<sup>8</sup>

El resaltado es mío para destacar que la fórmula de Planck “merece preferencia por su sencillez”, como criterio de verdad científica. Así, se cierran las cuestiones planteadas por Planck y a las que me referí en el punto 1.

Revisando el texto de Rubens y Kurlbaum (1900), puede observarse que no se pone énfasis en las unidades de medición de  $I_E(\lambda, T)$  –por todos los autores conocidas– sino en la forma estructural de las fórmulas para su comparación rápida.

Además, ya veremos cómo ese “-1” de la fórmula de Planck hará historia en las manos de Einstein en 1916, justificando su valor científico. Por otro lado, plantear ahora la pregunta de cómo se habrían desarrollado las ideas físicas en caso de que Rubens y Kurlbaum hubieran optado en 1900 por la fórmula de lord Rayleigh es contrafáctica. No obstante, me atrevo a señalar que el trabajo de Einstein de 1916 hubiera puesto de manifiesto que la expresión de Planck era la correcta, más allá de su sencillez.

# 4.

## EL GEDANKENEXPERIMENT DE EINSTEIN Y LA EMISIÓN ESTIMULADA

En 1916 Einstein se enfrentó con el problema de la interacción de la radiación electromagnética y la materia a nivel atómico. Para ello diseñó uno de sus *Gedankenexperiment* o “experimento ideal”, es decir, la “modelización de una situación experimental posible, que se analizaba teóricamente”.

Un breve resumen histórico de las tres décadas de investigaciones que motivaron el estudio de Einstein pondrá en evidencia su importancia. Los hechos son los siguientes:

a) En 1885 Johann Jakob Balmer observó el espectro de emisión del hidrógeno y describió la posición de las líneas espectrales del visible según la fórmula original:

$$\lambda = [m^2/(m^2-4)] \cdot 3646 \text{ \AA}, \text{ para } m = 3, 4, 5,$$

Así, Balmer realizó el primer “análisis espectral” de esa serie de líneas, la que pasó a denominarse “serie de Balmer”.

b) En 1888, Johannes Robert Rydberg generalizó la fórmula de Balmer para otros valores de  $4 = 2^2$  y predijo otras series de líneas espectrales del H localizadas en el ultravioleta y en el infrarrojo, las que podrían observarse tanto en emisión, como lo hizo Balmer:  $1/\lambda = R_H[(1/n^2) - (1/m^2)]$ , con  $n = 2$  y  $m = 3, 4, 5, \dots$ , siendo  $R_H = 109\,677 \text{ cm}^{-1}$ , o en absorción, como había ocurrido con las observaciones del espectro contenido en la luz solar, realizadas por Joseph von Fraunhofer, en 1814, y en las que se destacaban las líneas de la serie de Balmer absorbidas por la corona solar sobre el fondo del continuo de la emisión del Sol, como si fuera un “cuerpo negro” a la temperatura de unos  $6\,000 \text{ }^\circ\text{C}$ . Este procedimiento de análisis espectral se denominó “principio de intercombinación de Rydberg”. Además, sus mediciones fueron de tal calidad que pudo dar un mejor valor a la constante  $R_H$ . Actualmente, dicha constante es denominada “constante de Rydberg” y es igual a  $R = 109\,737,583\,06 \text{ cm}^{-1}$ .

c) En 1897 Joseph John Thompson descubrió el electrón —la partícula de carga negativa que, desde la época de Maxwell (1865), se suponía que debía existir— y propuso una estructura de átomo denominada “budín de pasas”, en la que una masa cargada positivamente contenía a los electrones, los que al vibrar emitirían luz. Thompson fue galardonado con el Premio Nobel de Física en 1906.

d) En 1900 Planck introdujo sus históricos aportes, la fórmula  $I_e(\lambda, T)$  de la emisión del cuerpo negro y la fórmula del *quantum de radiación*  $E = h\nu$ .

e) En 1906 Theodore Lyman observa la serie espectral del hidrógeno para:  $n = 1$  y  $m = 2, 3, 4, \dots$

f) En 1908 Paschen observa otra serie espectral del hidrógeno. Esta es para  $n = 3$  y  $m = 4, 5, 6, \dots$

g) En 1911 Ernst Rutherford estableció, como conclusión de su experimento de dispersión de partículas  $\alpha$  en láminas de oro, la estructura del átomo con un núcleo cargado positivamente y los electrones orbitando a su alrededor. Además, determinó que la partícula  $\alpha$  es el núcleo del átomo de He. Rutherford fue galardonado con el Premio Nobel de Química en 1908.

h) Niels Bohr propuso, en 1913, la estructura del átomo de hidrógeno como condensación de todos los antecedentes mencionados. Bohr fue galardonado con el Premio Nobel de Física en 1922.

i) Finalmente, una consideración sobre los denominados “viejos espectroscopistas” —de los cuales los más destacados fueron Anders Jonas Ångström (desde 1853), Robert Wilhelm Bunsen (desde 1859), Gustav Robert Kirchhoff (desde 1859) y el propio Rydberg (desde 1888)—, quienes introdujeron en sus análisis espectrales el factor  $f$  que les permitía indicar las intensidades relativas de las líneas espectrales que observaban y medían sus longitudes de onda. Dicho factor pasó a denominarse “oscillator strength”, en clara indicación de qué ocurría cuando un átomo emitía o absorbía radiación. Este factor todavía hoy se sigue empleando, midiéndoselo con procedimientos adecuados, y es de particular interés para los estudios astrofísicos. En efecto, en la Reunión Latinoamericana de Espectroscopía Atómica y sus Actuales

Aplicaciones,<sup>9</sup> el Prof. Dr. Oscar Di Rocco, del Instituto de Física Arroyo Seco, de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, envió una comunicación sobre "Oscillator Strengths en Materia Densa y Caliente; Variación de los  $f(i,j)$  y competencia con otros efectos".  $f(i,j)$  indica al "oscillator strength" para la transición entre el nivel  $i$  y el nivel  $j$ .

El *Gedankenexperiment* planteado por Einstein consiste de un paralelepípedo de paredes totalmente reflectoras en su interior y calentadas a la temperatura  $T$ , con lo que dicho interior está inundado por radiación del cuerpo negro  $I_E(\lambda, T)$ . Esta cavidad es adiabática, ya que nada de energía puede salir de ella o entrar en ella. En su interior hay una cantidad  $N$  de átomos que poseen solo dos niveles de energía,  $E_1$  y  $E_2$ , con  $E_2 > E_1$ , y cuyas poblaciones  $N_1$  y  $N_2$  se reparten entre ambos niveles, de acuerdo con la "distribución de Boltzmann"

$$N_2/N_1 = \exp[-(E_2 - E_1)/(kT)] = \exp[-(h\nu_{21})/(kT)].$$

La cantidad de átomos  $N = N_2 + N_1$  no debe ser demasiado grande para que predomine la interacción entre la radiación y los átomos. Tal interacción ocurrirá según dos procesos: de absorción a la frecuencia  $\nu_{12}$ , y de emisión a la frecuencia  $\nu_{21}$ , siendo  $\nu_{12} = \nu_{21} = (|E_2 - E_1|)/h$ . Con estos elementos, Einstein planteó las fórmulas para las interacciones, introduciendo por primera vez la noción de la "probabilidad de transición" y designando con  $B_{12}$  a la probabilidad de transición por absorción de radiación  $I_E(\nu_{12})$  y con  $A_{21}$  a la probabilidad de transición por emisión. Así, resultan que:

$$\text{La absorción: } - N_1 \cdot I_E(\nu_{12}) \cdot B_{12},$$

$$\text{La emisión: } + N_2 \cdot A_{21}.$$

Luego, como la cavidad es adiabática, la condición de equilibrio entre el campo de radiación y ambos procesos de su interacción con los átomos, la planteó mediante la ecuación:

$$N_2 \cdot A_{21} - N_1 \cdot I_E(\nu_{12}) \cdot B_{12} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{de la que: } I_E(\nu_{12}) &= [A_{21}/B_{12}] \cdot [N_2/N_1] = \\ &= [A_{21}/B_{12}] \cdot \exp[-(h\nu_{21})/(kT)] = \\ &= [A_{21}/B_{12}] \cdot \exp[-(hc/k)/(\lambda_{21}T)]. \end{aligned}$$

Pero esta expresión final tiene exactamente la misma estructura que la fórmula de Wien de 1896 y de Planck de 1899, en la que, para que el parecido se resalte más aún, escribí el denominador de la función exponencial como  $\lambda_{21}T$ . Como esta expresión había sido declarada incorrecta, Einstein recordó la fórmula de Planck de 1900 y de su "-1", así que, decidió incorporar otra forma hipotética de emisión de los átomos excitados a la que denominó "emisión inducida" o "emisión estimulada", haciendo su expresión semejante a la de la absorción, o sea, que su probabilidad de emisión dependiera de la irradiancia  $I_E(\nu_{21})$  que afectaba a los átomos:

$$\text{La emisión estimulada: } + N_2 \cdot I_E(\nu_{21}) \cdot B_{21}$$

A la emisión que había considerado en el intento anterior, Einstein la denominó "emisión espontánea"; la que los átomos emiten libremente. Ahora, la ecuación del equilibrio le quedó así:

$$N_2 \cdot A_{21} + N_2 \cdot I_E(\nu_{21}) \cdot B_{21} - N_1 \cdot I_E(\nu_{12}) \cdot B_{12} = 0,$$

y, al despejar de ella  $I_E(\nu_{21})$ , siguiendo los mismos pasos algebraicos del cálculo anterior, obtuvo:

$$I_E(\nu_{21}) = A_{21}/\{B_{12}[\exp((hc/k)/(\lambda_{12}T))] - B_{21}\}.$$

Einstein entonces introdujo la suposición de que  $B_{12} = B_{21} = B$ , y generalizó su fórmula para cualquier otra transición atómica y cualquier temperatura, la cual fue:

$$I_E(\lambda, T) = A/B\{\exp((hc/k)/(\lambda T)) - 1\},$$

cuya forma es idéntica a la de la expresión de Planck de 1900:

$$I_E(\lambda, T) = C' \lambda^{-5} / \{[\exp(c'' / \lambda T)] - 1\},$$

y, por lo tanto, las constantes  $C'$  y  $C''$  adoptarán los valores de  $A, B, T, \lambda$  que correspondan a cada transición.

Así, en 1916 Einstein introdujo dos nuevos conceptos físicos:

a) La emisión estimulada de radiación, y

b) Las probabilidades de transición para la absorción  $B_{12}$ , para la emisión espontánea  $A_{21}$  y para la emisión estimulada  $B_{21}$  (Einstein, 1916, 1917).

Aquí vuelvo al cierre de la sección 3. En efecto, la importancia y trascendencia de los resultados de Einstein de 1916, sintetizados en su fórmula:

$$I_E(\lambda, T) = A/B \{[\exp((hc/k)/(\lambda T))] - 1\},$$

le iban a conceder el derecho a asegurar que la expresión de Planck de 1900 era la correcta, más allá de su simplicidad.

Además, la introducción de la probabilidad de emisión espontánea le dio respaldo a aquella noción instrumental “oscillator strength” o factor  $f$ . Y la emisión estimulada de radiación saltó a nivel público mundial el 17 de mayo de 1960, cuando Theodore Maiman anunció públicamente que había funcionado su láser de rubí. En efecto, el acrónimo inglés “laser” significa “light amplification by stimulated emission of radiation”, que se traduce al castellano como “amplificación de luz por emisión estimulada de radiación”, cuya sigla es **ALEER**, lo cual me permite invitar al lector a seguir leyendo para enterarse de la nueva historia —algo ficcional— del láser, según el análisis actual de los trabajos de un famoso argentino nacido en Mendoza en 1900, Enrique Gaviola.

## 5.

### LA EMISIÓN ESTIMULADA Y SUS PRIMEROS AÑOS DE HISTORIA

Las propuestas y los resultados de 1916 publicados por Einstein produjeron, al mismo tiempo, alivio y desafíos. Alivio, porque eran una contribución importante para estimular el desarrollo de la teoría de la estructura atómica, basada esencialmente en los resultados de la espectroscopía óptica. Desde 1920 y hasta 1930, los mayores contribuyentes con estudios teóricos fundantes fueron Christian Füchtbauer, Hendrik A. Kramers, Paul A. M. Dirac y Rudolf W. Ladenburg (Dirac fue galardonado con el Premio Nobel de Física en 1933). Los desafíos estaban centrados en algo evidente: Los espectroscopistas conocían muy bien los procesos de emisión espontánea y de absorción, pero nadie se atrevió a señalar cómo se podría distinguir la emisión estimulada de la emisión espontánea, porque no se sabía qué características podrían diferenciarlas. Este asunto implicó estudiar el significado de la inversión de población entre niveles de energía atómicos y el equilibrio termodinámico, la absorción anómala, la absorción negativa y la dispersión negativa en gases. Sus resultados fueron simplemente expresados en tres fórmulas. Füchtbauer y Ladenburg publican la primera de ellas en 1924. Establecen la relación directa que existe entre el coeficiente de absorción  $\alpha(\nu)$  de un gas en los alrededores de una particular línea espectral de frecuencia  $\nu$  con el coeficiente  $B$  de Einstein y  $\Delta N$ , la diferencia de las poblaciones de los niveles de energía entre los que se produce la transición de dicha línea espectral (Füchtbauer, 1920). A su vez Ladenburg y Kopfermann publican las otras dos fórmulas en 1928. Una considera la relación directa que existe entre el índice de refracción  $n(\nu)$  de un gas en los alrededores de una particular línea espectral de frecuencia  $\nu$  con su “oscillator strength” y  $\Delta N$ , la diferencia de las poblaciones de los niveles de energía entre los que se produce la transición de dicha línea espectral. Y la otra fórmula establece la relación matemática entre el coeficiente  $B$  de Einstein y el “oscillator strength” (Füchtbauer, Joos y Dinkelacker, 1923). Ellas son:

$$\int \alpha(\nu) d\nu = (h\nu/c) B_{21} (N_1 - N_2),$$

$$n(\nu)^2 - 1 = (e^2/\pi m)[(N_1 f_{21} - N_2 f_{21})/(\nu_{21}^2 - \nu^2)], \text{ y}$$

$$B_{21} = (\pi e^2/3 m h \nu) f_{21},$$

en las que  $m$  es la masa del electrón y  $e$  su carga eléctrica.

El binomio de Füchtbauer y Ladenburg y el de Ladenburg y Kopfermann realizaron los experimentos correspondientes a sus respectivas fórmulas. Las condiciones experimentales fueron las mismas que las del *Gedankenexperiment* de Einstein; la cantidad de átomos  $N$  debe ser relativamente baja para favorecer la interacción de la  $I_e(\lambda, T)$  con los átomos al reducirse los choques entre ellos. Así, trabajaron con neón (Ne) a muy bajas presiones, pero forzaron las situaciones experimentales haciendo pasar corrientes eléctricas crecientes de modo que la población  $N_2$  de los átomos excitados al nivel superior, desde donde arranca la transición espectral bajo estudio, fuera progresivamente mayor a la población  $N_1$  de los átomos en el nivel inferior donde termina. Así,  $N_1 - N_2$  resulta ser una cantidad negativa, a la que se llamó “inversión de población” —apartándose del equilibrio termodinámico—, y entonces  $\alpha(\nu)$  resulta la “absorción negativa” y  $n(\nu)$  la “dispersión negativa”, ambas previstas teóricamente.

La clásica ley de Beer relaciona la absorción de la luz con las propiedades de la sustancia a través de la cual la luz se propaga, según la expresión:

$$I(x, \nu) = I(0, \nu) \cdot \exp[-\alpha(\nu) \cdot x],$$

donde  $I(0, \nu)$  es la irradiancia de frecuencia  $\nu$  que incide en un recipiente de longitud  $X$  (un tubo largo) que contiene la sustancia de coeficiente de absorción  $\alpha(\nu)$  e  $I(x, \nu)$  es la irradiancia que emerge del recipiente. Así que, si en las condiciones de inversión de población la absorción del Ne resulta ser negativa (la “absorción negativa”), el exponente en la expresión de Beer resulta ser positivo y, por lo tanto, será  $I(x, \nu) > I(0, \nu)$ , o sea que la irradiancia de frecuencia  $\nu$  de entrada habrá sido amplificada.

El otro experimento, el de la “dispersión negativa”, dio resultados muy satisfactorios. El experimento estuvo basado en la utilización de un interferómetro que permitía determinar las variaciones del camino óptico en el tubo del experimento de “absorción negativa” anterior. El camino óptico fue definido por Pierre de Fermat hacia 1658 con su sentencia “la Naturaleza siempre actúa por el camino más corto”, al referirse a la ley de la Refracción. Así, el camino óptico es igual al producto del índice de refracción por el camino lineal recorrido por la luz. En el experimento de la “dispersión negativa” el camino óptico considerado es igual al índice de refracción del Ne para cada una de las cuatro líneas espectrales seleccionadas multiplicado por la longitud del tubo  $x$ . Como los índices de refracción  $n(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$  varían según varía la inversión de población  $N_1 - N_2$  en función de la corriente eléctrica creciente a través del tubo, pudieron determinar la validez de su fórmula:  $n(\nu)^2 - 1 = (e^2/\pi m)[(N_1 f_{21} - N_2 f_{21})/(\nu_{21}^2 - \nu^2)]$ .

Las longitudes de onda correspondientes a las cuatro líneas espectrales del Ne, empleadas en los experimentos de 1928, fueron  $\lambda_1 = 588,2$  nm,  $\lambda_2 = 594,4$  nm,  $\lambda_3 = 633,4$  nm y  $\lambda_4 = 703,2$  nm. Casi cuarenta años después, en publicaciones de 1965 a 1967, las líneas  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  fueron reportadas en emisión estimulada, tanto en experimentos de láser, empleando una cavidad resonante, cuanto en experimentos de emisión superradiante, empleando un tubo lo suficientemente largo, por lo que no requiere espejos para lograr la amplificación o requiere solo uno.

## 6.

### GAVIOLA. DE LA PLATA A ALEMANIA Y LUEGO A LOS ESTADOS UNIDOS

Enrique Gaviola, cuando era estudiante de Agrimensura en la Universidad Nacional de La Plata, fue motivado por el Prof. Richard Gans, por entonces Director del Instituto de Física de la UNLP, a cursar estudios de Física en Alemania, dado el interés de Gaviola por la física, su talento y su compromiso como estudiante. Se embarcó en marzo de 1922, para comenzar sus estudios en la Universidad de Göttingen, la que había sido remozada en 1915.

En efecto, en 1915, el ministro de Cultura del Gobierno del Kaiser Wilhelm II, en medio del desarrollo de la Gran Guerra (1914-1918), tenía que decidir la cobertura de las cátedras en Göttingen. Cada profesor

designado era considerado director de un Instituto de Investigación Experimental. En Göttingen habían quedado vacantes los puestos dejados por Eduard Riecke (retirado) y Woldemar Voigt (fallecido). Max Born había dejado su cargo en Frankfurt para trasladarse a Göttingen, desde donde le acercó al ministro su lista de candidatos a reemplazarlos —James Franck y Richard Pohl, ambos “experimentalistas”— y su solicitud de agregar otra cátedra para atender el desarrollo de los últimos años en física teórica, particularmente los realizados en Berlín por Planck y Einstein. Su petición fue aceptada por el ministro. La nueva cátedra la ocupó el propio Max Born, el único “teórico” en Göttingen, quien siempre sostuvo que no era un “experimentalista”. Luego entre los tres acordaron la asignación de los espacios del amplio edificio: subsuelo, planta baja, dos pisos y altílo.



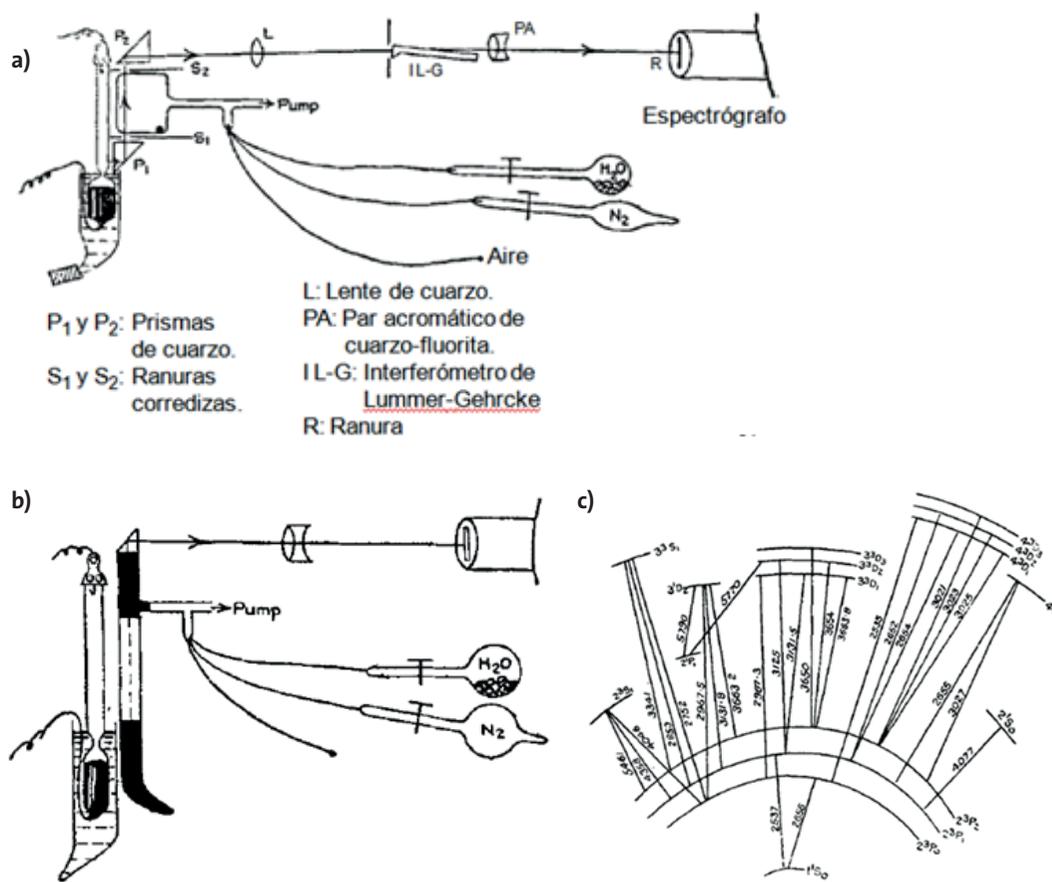
**Fotografía 1.** Die Bonzen (Los Peces Gordos) (1923). (Izq. a der.): Max Reich, Max Born (Premio Nobel 1954), James Franck (Premio Nobel 1925) y Robert Pohl.



**Fotografía 2.** Visita de Einstein a La Plata. Albert Einstein en La Plata el 2 de abril de 1925, mientras Gaviola preparaba la disertación de su tesis doctoral. Al lado de Einstein, hacia la derecha de la foto, se ubican el presidente de la Universidad, Dr. Benito Nazar Anchorena y el Prof. Dr. Rafael Grinfeld.

Al llegar, Gaviola se presentó en el Instituto del Prof. Richard Pohl donde fue aceptado en el acto por su director por la mera lectura de la carta de recomendación del Prof. Gans. En Göttingen Gaviola completó sus estudios y se trasladó a Berlín, donde se doctoró, bajo la dirección de Max von Laue (Premio Nobel de Física 1914) y Walther Nernst (Premio Nobel de Química 1920) y la supervisión directa de Ernst Pringsheim. La comisión examinadora estuvo integrada por Lise Meitner, Albert Einstein (Premio Nobel de Física 1921) y Peter Pringsheim (hermano de Ernst) (ver Fotografía 2). Realizó su tesis doctoral sobre fluorescencia y fosforescencia de gases y soluciones, y obtuvo la calificación de sobresaliente (*magna cum laude*) y el 6 de junio de 1926 asistió a la ceremonia ritual de graduación como “Philosophiae Doctoris et Artium Liberalium Magistri”, de la Friedrich Wilhelms Universität de Berlín. Después se postuló para una beca Rockefeller y, a pesar de haber obtenido el primer puesto, cuando detectaron que era originario del hemisferio sur lo rechazaron, porque el reglamento solo consideraba a candidatos de Europa y de Estados Unidos. No obstante, el International Education Board de la fundación Rockefeller se la otorgó luego de recibir la carta de protesta y recomendación que envió Einstein. De 1927 a 1928 trabajó en el laboratorio del Prof. Robert W. Wood en la Johns Hopkins University en temas de espectroscopía óptica de emisión y de fluorescencia en vapores de mercurio. En 1929 fue incorporado como asistente de investigaciones en el Departamento de Magnetismo Terrestre en el Carnegie Institute of Washington, donde trabajó en el proyecto de un acelerador de electrones para el que se llegó a obtener un potencial de 5 MV.

Sus estudios experimentales junto a R. W. Wood estuvieron centrados en la investigación cuantitativa de la emisión fluorescente del vapor de mercurio contenido en tubos de cuarzo de 12 cm de largo y diámetros de 10 cm y de 3 cm, al vacío y a temperatura ambiente. La fluorescencia del vapor de mercurio en estos tubos era excitada por la luz de mercurio emitida desde otro tubo de cuarzo de 12 cm de largo y 3 cm de diámetro al vacío, a temperatura ambiente, donde el vapor de mercurio era, a su vez, excitado por una descarga eléctrica, la cual era contraída radialmente mediante la aplicación de campos magnéticos (*efecto pinch*). Este tubo estaba ubicado paralelamente a los tubos previamente mencionados y en posición vertical. La fluorescencia del mercurio era colectada en la boca superior de los dos tipos de tubos (10 cm y 3 cm de diámetro) por un prisma de cuarzo de reflexión total y de este mediante lentes acromáticas de cuarzo-fluorita era enfocada sobre la ranura de un espectrógrafo a prisma de cuarzo con registro fotográfico de los espectros (Ver Figura 3). Además, estudió la variación de la intensidad de algunas líneas espectrales fluorescentes del mercurio cuando en el tubo agregaba pequeñísimas cantidades de  $N_2$ ,  $CO$ ,  $CO_2$ ,  $H_2O$  o aire. Es notable la meticulosidad de las

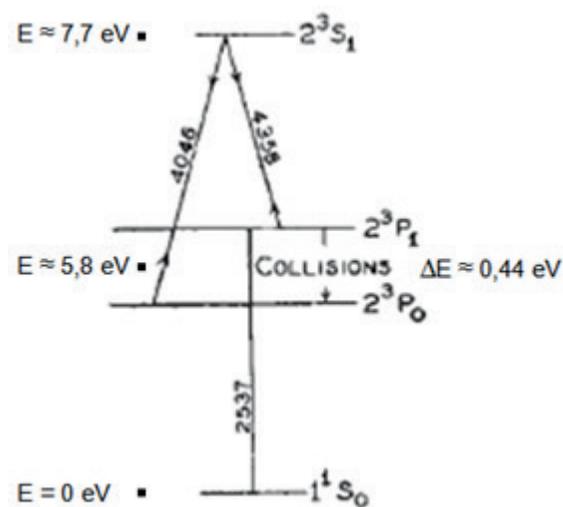


**Figura 3.** Esquemas experimentales trazados a mano por Gaviola para sus publicaciones en el *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. a) Caso del tubo emisor del espectro del Hg de  $\varnothing = 3$  cm y tubo de  $\varnothing = 10$  cm donde se emite la fluorescencia del Hg. b) Caso del tubo emisor del espectro del Hg de  $\varnothing = 3$  cm y tubo de  $\varnothing = 3$  cm donde se emite la fluorescencia del Hg. c) Representación de los niveles de energía del Hg (como si fueran partes de las órbitas de los electrones) e indicados según la nomenclatura de Paschen. Los valores de las longitudes de onda están dados en Å (Ångström). La equivalencia con las unidades del texto es tal que, como ejemplo, para la línea prohibida de la transición  $2^3P_0 - 1^1S_0$ ,  $2656 \text{ Å} = 265,6 \text{ nm}$ .

numerosísimas experiencias realizadas por Gaviola, particularmente, aquellas que implicaban determinar las intensidades relativas de líneas espectrales o las proporciones de las poblaciones de los niveles de energía involucrados en algunas transiciones específicas. Tales como aquellas denominadas “transiciones prohibidas” por no cumplir con las reglas de transición conocidas. Sin embargo, modificando las condiciones experimentales logró provocarlas, y observar, fotografiar y estudiar su comportamiento (Wood y Gaviola, 1928).

## 7. GAVIOLA Y SCHRÖDINGER

A fines de 1928, Gaviola sorprendió con una breve publicación (de media página), en la prestigiosa revista *Nature*, titulada “An Experimental Test of Schrödinger’s Theory” (Gaviola, 17 de noviembre de 1928, p. 772). Recordemos que las cuatro publicaciones de Erwin Schrödinger en las que presenta su “Mecánica ondulatoria” son de 1926 (Schrödinger, 1926a, 1926b, 1926d, 1926e). El prestigio de Schrödinger creció notablemente en 1927, cuando sucedió a Max Planck en su cátedra de la Universidad de Berlín. Schrödinger recibió el Premio Nobel de Física en 1933, en mérito por haber desarrollado la ecuación que lleva su nombre y sus aplicaciones a la física atómica. En su texto Gaviola reflexionó, a partir de los resultados de su enorme trabajo experimental y sus análisis teóricos, sobre el comportamiento de dos peculiares transiciones de los átomos de Hg que se inician en el mismo nivel de energía excitado  $2^3S_1$ , según la notación de Paschen de la época. Una de las líneas espectrales, la de longitud de onda  $\lambda_1 = 435,8 \text{ nm}$ , termina en el nivel  $2^3P_1$ , mientras que la otra línea espectral, la de  $\lambda_2 = 404,6 \text{ nm}$ , lo hace en el nivel  $2^3P_0$ . A su vez, el nivel  $2^3P_1$  descarga su población, recibida a través de la línea  $435,8$ , mediante la transición de  $\lambda = 253,7 \text{ nm}$  al nivel de energía fundamental o de energía nula,  $1^1S_0$ . En cambio, el nivel  $2^3P_0$  no puede conectarse con el nivel fundamental, porque dicha transición la prohíben las reglas espectroscópicas; por ello al nivel  $2^3P_0$  se lo denomina



**Figura 4.** Versión original de los niveles y transiciones en la crítica a Schrödinger (Wood y Gaviola, 1928). Las energías  $E$  y el  $\Delta E$  las agregué para dar completitud al esquema.

“metaestable”, porque su población recibida a través de la línea 404,6 puede permanecer en él por un tiempo relativamente largo hasta que la descargue por impactos con otros átomos no excitados o con las paredes del tubo. Gaviola verificó que la relación de las intensidades de ambas líneas,  $I_1/I_2$ , se mantenía constante en 2, a pesar de que las poblaciones de sus niveles terminales los hiciera variar según distintas condiciones experimentales. Así, concluía Gaviola que los hechos observados dependían solo de la población del nivel de energía excitado  $2^3S_1$  (Figura 4). Con ello contradecía la interpretación que se hacía por entonces de la teoría de Schrödinger, en el sentido de que la intensidad de las líneas espectrales dependía de la relación de las poblaciones de los niveles inicial y terminal de la transición electrónica respectiva.

Conviene aquí señalar que, en aquellos primeros años después de las publicaciones de Schrödinger de 1926, se promovieron grandes controversias sobre su “interpretación de los hechos físicos”, en particular, la noción de “transición del electrón de un nivel de energía a otro”, ya que la teoría solo indicaba que el electrón estaba en un nivel o en el otro, con lo que se perdía la idea de la “transición”. Según Schrödinger, el nivel superior se caracteriza con su función de onda  $\Psi_s$ , mientras que el nivel inferior con su función de onda  $\Psi_i$ . Sobre estas discusiones bastan como ejemplo la carta que Hendrik Antoon Lorentz (Premio Nobel de Física de 1902) le envió a Schrödinger el 19 de junio de 1926 con sus observaciones y preguntas esenciales, y que Schrödinger le contestó el 23 de junio de 1927 (más de un año después) de modo poco convincente, porque él mismo tenía sus dudas, las que, en general, las clasificaba como de orden filosófico. Fue Max Born quien resolvió la cuestión de la “transición del electrón de un nivel de energía a otro” con su contribución mayor a la naciente mecánica ondulatoria, al publicar su obra *Atomdynamik* (1926) en la que introdujo la interpretación del producto  $\Psi_s\Psi_i$  como la probabilidad de transición del electrón entre ambos niveles atómicos.

## 8.

### CONSECUENCIAS DE LA PUBLICACIÓN DE GAVIOLA

Ha habido varias menciones al texto de Gaviola publicado en *Nature*; estas siempre estuvieron referidas al asunto técnico que él expuso, pero sin profundizar en los aspectos básicos fundamentales de la teoría de Schrödinger. Quizá quien mejor lo expresa es Michael Bitbol en su libro *Schrödinger's Philosophy of Quantum Mechanics* (2012). Quienes deseen encontrar otras fuentes, pueden navegar por Internet con el asunto “Opinions on Gaviola’s paper related to the Schrödinger theory”. Es posible que también se topen con la única referencia que relaciona el texto de Gaviola con el láser, sin decirlo. Se trata del libro *Lasers*, de Anthony E. Siegman (1986), donde se describe casi idénticamente lo que está contenido en el punto 7 (p. 29). Luego, puede preguntarse por qué Siegman con sus once renglones y medio relaciona a Gaviola con el láser. Me atrevo a señalar que lo hace porque le da relieve al hecho de que el nivel de energía superior es el que gobierna los procesos de emisión, sin usar el término “inversión de población”. No obstante, Siegman al señalar que Gaviola no pudo determinar experimentalmente las poblaciones de los niveles de energía involucrados en las transiciones consideradas, bien podría haber indicado que su estimación de dichas poblaciones está basada en un procedimiento habitual utilizado por Gaviola. Es decir, hacer uso de sus mediciones de las intensidades de las líneas espectrales 253,7 nm y 404,6 nm, incorporar una conjetura plausible sobre la relación entre los coeficientes de absorción del vapor de mercurio para ambas líneas espectrales, seguido de un simple cálculo.

Y aquí sí entro yo a jugar tratando de “hacerle decir” a Gaviola lo que “no dijo” en su publicación en la revista *Nature* sobre los espectros del mercurio. Repasemos: Gaviola estuvo en Alemania cinco

años completos (1922 a 1926) investigando en temas de espectroscopía óptica, con lo que, con seguridad, conocía los trabajos de Einstein (1917), y de Füchtbauer y Ladenburg (1924), y asistirá a todos los seminarios que dictaban los más afamados investigadores en las diversas instituciones de Berlín; la ciudad estaba en ebullición académica desde hacía treinta años. Así que hay que prestarle atención a Gaviola, ya que en una de sus publicaciones pone en duda que la “línea espectral prohibida” del Hg de  $\lambda = 265,6$  nm emitida en la transición  $2^3P_0 - 1^1S_0$  fuera “emitida espontáneamente” desde el nivel metaestable  $2^3P_0$ , porque su probabilidad de transición sería muy baja. Por ello sugiere que el nivel  $2^3P_0$  habría sido “perturbado” para que tal transición ocurra, sin caracterizar la modalidad de perturbación (Wood y Gaviola, 1928). Luego, me propongo leer su breve publicación en *Nature* en otro registro, revisando algunos párrafos esenciales y confrontándolos con párrafos relacionados de sus otras publicaciones. Será un Gaviola vs. Gaviola.

## 9.

### ANÁLISIS CRÍTICO DE LAS PUBLICACIONES DE GAVIOLA

Lo que sigue, por lo tanto, tiene algo de “física ficción”. Como ya señalé, en su publicación en *Nature*, Gaviola comenzó indicando el comportamiento de dos peculiares transiciones de los átomos de Hg que se inician en el mismo nivel de energía excitado, el  $2^3S_1$ . Estas transiciones eran emisiones fluorescentes del mercurio obtenidas con uno de los experimentos detallados en el punto 6. Me refiero al de los dos tubos de 3 cm de diámetro ubicados verticalmente y paralelamente entre sí, al vacío y con mercurio a temperatura ambiente, por lo cual el mercurio se vaporiza. La intensísima luz generada en el vapor de mercurio atravesado por descargas eléctricas excitaba diversos niveles de energía de los átomos de mercurio del otro tubo, produciendo, entre otras, las transiciones fluorescentes que le interesaban a Gaviola (ver Figuras 3b y 4). Una de las líneas espectrales, la de longitud de onda  $\lambda_1 = 435,8$  nm, termina en el nivel  $2^3P_1$ , al que denomina resonante, porque descarga su población mediante la transición de  $\lambda = 253,7$  nm, llamada resonante, al nivel de energía fundamental o de energía nula, el  $1^1S_0$ . La otra línea espectral, la de  $\lambda_2 = 404,6$  nm termina en el nivel  $2^3P_0$ , el que no puede conectarse con el nivel fundamental porque lo prohíben las reglas espectroscópicas, y, por ello, se lo denomina “metaestable”, dado que su población permanece en él un largo tiempo, hasta que la pierde por impactos con las paredes del tubo. Luego, Gaviola señala que las poblaciones de ambos niveles terminales,  $2^3P_1$  y  $2^3P_0$ , las variaba agregando pequeñas cantidades de nitrógeno o de vapor de agua, logrando que la intensidad fluorescente de las líneas 435,8 y 404,6 aumentara alrededor de 25 veces. Con estos datos experimentales, una conjetura plausible sobre la relación entre los coeficientes de absorción del vapor de mercurio para las líneas espectrales 253,7 nm y 404,6 nm y un simple cálculo, según Gaviola, le permitió afirmar que la población de los átomos estacionados en el nivel metaestable,  $2^3P_0$ , sería, por lo menos, 100 veces mayor que la de los átomos en el nivel resonante,  $2^3P_1$ . Para terminar en forma contundente la argumentación que buscaba, Gaviola midió las intensidades fluorescentes de las líneas 435,8 y 404,6 excitando el vapor de mercurio con una muy estrecha lámina de luz proveniente del otro tubo, seguramente lograda colocando entre ambos tubos una pantalla con una delgada ranura del largo de los tubos (Gaviola, 1928a).

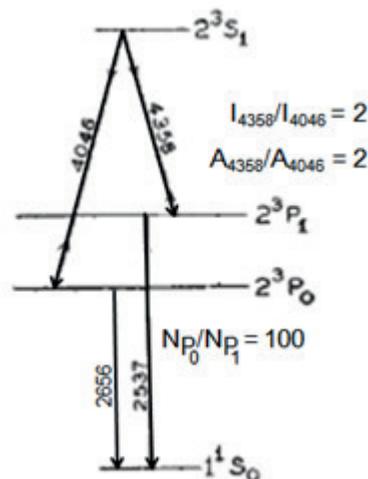


Figura 5. Nueva interpretación para la crítica a Schrödinger

Hasta aquí lo que “dijo” Gaviola en la revista *Nature*. Pero lo que “no dijo” en ella, y está documentado en otro de sus trabajos, es que en las condiciones experimentales allí mencionadas fotografió la “línea prohibida” 265,6 que une el nivel metaestable superpoblado  $2^3P_0$  con el nivel fundamental  $1^1S_0$ , y analizó su comportamiento (Figura 5).

Midió la probabilidad de la emisión espontánea de dicha línea, la que resultó ser  $10^8$  veces menor que la de la línea 253,7, que es de  $10^{-7}$  s, así que la vida media del nivel  $2^3P_0$  sería de  $10^8 \times 10^{-7} \text{ s} = 10$  s, en las mejores condiciones, las que, concluyó Gaviola pueden existir en algunas estrellas (Gaviola, 1928b).

Con semejante conclusión parece imposible seguir. Pero no hay tal barrera. Se debe rescatar que la “línea prohibida” 265,6 que une el nivel metaestable superpoblado  $2^3P_0$  con el nivel fundamental  $1^1S_0$ , en efecto fue observada por Gaviola,

y determinada la población de los átomos estacionados en el nivel metaestable,  $2^3P_0$ , la que sería, por lo menos, 100 veces mayor (¿500 o 1000?) que la de los átomos en el nivel resonante,  $2^3P_1$ . Esto nos permite asegurar que el nivel metaestable  $2^3P_0$  está superpoblado con relación al nivel fundamental  $1^1S_0$ , con lo que hay inversión de población. Luego, me pregunto ¿a cuánto ascendería la relación de sus poblaciones,  $N(2^3P_0)/N(1^1S_0)$ ? Hagamos la suposición de que esa relación es de 10 000, entonces:  $N(2^3P_0)/N(1^1S_0) = \exp[-(h\nu)/(kT)] = \exp[-(hc)/(\lambda kT)] = 10\,000$ ,

de donde:

$$\exp[-(hc)/(\lambda kT)] = 10\,000.$$

Tomando logaritmos naturales en ambos miembros y despejando la temperatura T, resulta ser igual a  $T = 6\,000$  K, algo más que la temperatura superficial del Sol ( $T_{\text{sol}} \approx 5770$  K). Así que Gaviola estaba en lo cierto (Gaviola, 1928b); las condiciones que él consideraba eran de las estrellas.

Además, para la línea 265,6 la relación entre la probabilidad de emisión espontánea A sobre la probabilidad de emisión estimulada B, es igual a:

$$A/B = 8\pi h\nu^3/c^3 \approx 8,88 \times 10^{-13}, \text{ con lo que:}$$

$$B/A = c^3/8\pi h\nu^3 \approx 1,13 \times 10^{12}.$$

De modo que, para que predomine en la transición de la línea 265,6 la emisión estimulada sobre la emisión espontánea, debe superarse el factor  $1,13 \times 10^{12}$ , lo cual efectivamente puede ocurrir porque Gaviola midió  $A = 0,1$  (Gaviola, 1928b) y, por lo tanto:  $B \approx 1,13 \times 10^{13}$ , con lo que su emisión estimulada estaría asegurada.

Pero hay más. Recordando que Gaviola excitó el vapor de mercurio con una muy estrecha lámina de luz proveniente del otro tubo, queda así garantizada la orientación de la emisión fluorescente de la línea 265,6, la que puede ser hecha en ambas direcciones a lo largo del tubo, hacia arriba y hacia abajo (Figura 3b). Es cierto que puede haber algo de emisión fluorescente transversal a la lámina de luz, pero la descartamos por su bajísima intensidad y por no participar del fenómeno que nos interesa describir. La radiación que va hacia arriba es superradiante sin espejo, pero la que va hacia abajo se refleja en la superficie libre del mercurio, que es especular, por lo que esta radiación es superradiante con un espejo, a la manera comentada en el final del punto 5. Suponiendo que la ranura de la lámina usada por Gaviola fuera de 2 mm de ancho, se podría aceptar que la zona de emisión tuviera tenga un ancho de 2 mm. En tal caso, se puede calcular el ángulo  $\theta$  la divergencia del haz de luz como saliendo del centro del tubo de 120 mm de largo, o sea 60 mm, y emergiendo por la sección de 2 mm. Luego, para la emisión que va hacia arriba  $\theta = 2/60 \approx 0,033$  radianes  $\approx 1^\circ 53' 30''$ , mientras que para el otro haz, se refleja en la superficie de mercurio y sale hacia arriba, con  $\theta = 2/180 \approx 0,011$  radianes  $\approx 37' 48''$ . Este último haz prevalecerá por ser el más intenso (mayor camino de amplificación) y mejor dirigido (menor divergencia) para formar una imagen sobre la ranura del espectrógrafo con buena definición.

Por último, cabe suponer que con la intensísima emisión de la línea 265,6 el nivel de energía  $2^3P_0$  quedaría con una población inferior a la del nivel  $2^3S_1$ , generándose una situación de “inversión de población” entre ellos, lo que justificaría el notable aumento de la intensidad de la línea 404,6 nm observada por Gaviola. Y, al mismo tiempo, alimentaría la conjetura de una emisión amplificada zcomo ocurre en algunos láseres moleculares, como el de CO, en una cascada invertida temporalmente, con un primer paso:  $2^3P_0 \rightarrow 265,6 \text{ nm} \rightarrow 1^1S_0$ , y un segundo paso:  $2^3S_1 \rightarrow 404,6 \text{ nm} \rightarrow 2^3P_0$ .

# 10.

## “FÍSICA FICCIÓN” O CONJETURAS VEROSÍMILES

“Física ficción” o conjeturas con cierto grado de verosimilitud, se puede concluir, con más fundamentos que los invocados en la primera parte del punto 8, que Gaviola, por razones que solo él tenía guardadas, nunca indicó en sus publicaciones de 1928 y 1929 que, al menos, habría rozado los conceptos de “inversión de población” o “emisión estimulada”, pero que, de modo escondido, sí se los podría encontrar. Es lo que he tratado de demostrar al final del punto 8. En efecto, lo reitero, se debe prestar

atención a Gaviola, cuando pone en duda que la “línea espectral prohibida” del Hg de  $\lambda = 265,6$  nm emitida en la transición  $2^3P_0 - 1^1S_0$  fuera “emitida espontáneamente” desde el nivel metaestable  $2^3P_0$  porque su probabilidad de transición sería muy baja. Por ello sugiere que el nivel  $2^3P_0$  habría sido “perturbado” para que tal transición ocurra, sin caracterizar el tipo de perturbación requerida. Por ello, estoy convencido de que en sus publicaciones de 1928 está oculto el láser “a lo Gaviola”, aunque fue recién a partir de 1960 que se lo denominará láser.

Recuerdo que hace muchos años leí con interés aquella publicación de Gaviola titulada “An Experimental Test of Schrödinger’s Theory” de 1928 y solo la guardé en mi acervo de la memoria, sin haberle preguntado sobre el asunto al propio Gaviola las pocas veces que conversé con él durante su residencia en Bariloche. Fue un mail de Mario Gallardo con asunto “Garavaglia cómo no nos dimos cuenta antes” de que a Gaviola lo mencionan en varias fuentes como el creador del láser, el que desencadenó el proceso que expuse en el Exordio.

Quiero cerrar esta conclusión con otra importantísima referencia a un texto de Gaviola que está íntimamente relacionado con el que mencioné al final del punto 8:

“Se ha encontrado, por ejemplo, que si se aumenta la intensidad de la luz (*Tubo de descarga excitadora*) (Figura 3b) que excita la fluorescencia en 10,5 veces fue posible incrementar la intensidad de la fluorescencia (*Tubo emisor de fluorescencia*) de la línea 365,4 nm unas 120 veces, y la línea 365,0 nm en no menos de 1 200 veces. Luego, el vapor ópticamente excitado representa una fuente luminosa que irradia energía, la que en el caso de la línea 365,0 nm, aparentemente aumenta con la tercera potencia de la energía absorbida, o al menos con la tercera potencia de la intensidad excitadora. Esto parece entrar en contradicción con el principio de conservación de la energía, lo que lleva a preguntarse si es posible incrementar un centenar de veces la intensidad del arco de mercurio (*Tubo de descarga excitadora*), y que la intensidad de la fluorescencia de la línea 365,0 nm (*Tubo emisor de fluorescencia*) haya sido de un millón de veces. Y si es así ¿de dónde saldría esa energía?” (Gaviola, 1928).

## NOTAS

- 1. Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) falleció antes de que terminara el siglo XIX y, por lo tanto, no pudo ser propuesto al Premio Nobel porque la condición *post mortem* no estaba considerada.
- 2. Los cinco manuscritos de Einstein enviados a publicar en 1905 a los *Annalen der Physik* fueron: i) Efecto fotoeléctrico (enviado en marzo y publicado en mayo. Premio Nobel de Física 1921). ii) Cálculo del número de Avogadro y determinación del tamaño de la molécula de azúcar (enviado en abril y publicado en enero de 1906. Aceptado como Tesis Doctoral por la Universidad de Zürich en julio de 1905 y aprobado como Herr Doktor en enero de 1906). iii) Explicación del movimiento browniano (enviado en agosto y con una extensión en diciembre y publicado en febrero de 1906). iv) Teoría de la relatividad especial (enviado en junio y publicado el 30 de junio de 1905). v) Su famosa fórmula  $E = mc^2$  (enviado en septiembre y publicado el 30 de septiembre de 1905). Max Planck era el editor de los *Annalen der Physik*.
- 3. Físico alemán, 1865-1947. Fue uno de los más importantes espectroscopistas atómicos y moleculares del entresiglo XIX-XX.
- 4. Se conoce como “heurística” al conjunto de técnicas o métodos para resolver un problema. La palabra heurística es de origen griego ( $\epsilon\upsilon\acute{\rho}\iota\sigma\tau\epsilon\iota\nu$ ) y significa ‘hallar’, ‘inventar’, o “buscarle la vuelta” a un problema para resolverlo, sin aplicar razonamientos, solo la intuición o el “pálpito”.
- 5. Sobre el tema de los rayos residuales, su producción y sus propiedades se pueden revisar las publicaciones de H. Rubens y E. F. Nichols (*Wied. Ann.*, 60, 418, 1897); H. Rubens y E. Aschkinass (*Wied. Ann.*, 65, 241, 1898) y H. Rubens (*Wied. Ann.*, 69, 576, 1899); y la disertación de H. Beckmann, *Inaug. Dissert.*, Tübingen, 1898.
- 6. Ver nota 5 arriba.
- 7. Ver nota 5 arriba.
- 8. “We find, therefore, that so far as the representation of Lummer and Pringsheim’s results, as well as our, is concerned, the formulæ by Lord Rayleigh (1900) and M. Plank (1900) are excellently adapted, but the Planck’s expression, in so far as it does the same thing, deserves the preference on account of its simplicity”.
- 9. Realizada en el Centro de Investigaciones Ópticas (CONICET, UNLP y CIC), en Gonnet, La Plata, los días 23 y 24 de octubre de 2019.
- 10. 17 de noviembre de 1928, p. 772.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DEinstein, A. (1916). "On the Quantum Theory of Radiation". *Physikalische Gesellschaft Zürich Mitteilungen*. 18, 47-62. *Physikalische Zeitschrift*, 18, 121-128 (1917).
- Füchtbauer, C. (1920). "Die Absorption in Spektrallinien im Lichte der Quantentheorie", *Phys. Z.*, 21, 322-324.
- Füchtbauer, C. Joos, G. y Dinkelacker, O. (1923). "Über Intensität, Verbreiterung und Druckverschiebung vor Spektrallinien, insbesondere der Absorptionslinie 2537 des Quecksilber", *Ann. Phys. Leipzig.*, 71, 204-226.
- Gaviola, E. (1928). "An Experimental Test of Schrödinger's Theory". *Nature*, Vol. 122, N.º 3081, p. 772.
- Gaviola, E. (1928a). "CXIV. The power relation of the intensities of the lines in the optical excitation of mercury. Theory I". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 6. N.º 40, 1154-1167.
- Gaviola, E. (1928b). "CXV. The influence of foreign gases on the optical excitation of mercury. Theory II". *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 6, N.º 40, 1167-1191.
- Kopfermann, H. y Ladenburg, R. (1928). "Experimental proof of negative dispersion", *Nature*, 122, 438-439.
- Lummer, Otto y Pringsheim, Ernst (1899). "Die neueren Spektralmessungen" ("El nuevo espectrofotómetro"). *Verhandlung der Deutschen Phys. Ges., I. Jahrg. S. 23 y 25. II. Jahrg. S. 163, 1900.*
- Paschen, F. (1896) "Emission fester Körper" ("Emisión de un cuerpo sólido"). *Wied. Ann.*, 58, 455; 60, 662, 1897; *Berichte Berl. Akad.*, 1899, 405 y 959.
- Paschen, F. y Wanner, H. (1899). "Über eine photometrische Methode" ("Sobre un método fotométrico"). *Berichte Berl. Akad.*, 5.
- Planck, M. (1900). "On an Improvement of Wien's Equation for the Spectrum", *Annalen der Physik*, Berlín, 1, 719.
- Planck, M. (1901) "On the Law of Distribution of Energy in the Normal Spectrum", *Annalen der Physik*, Berlín, 4, 553.
- Rubens, H. y Kurlbaum, F. (1900). "On the Heat-Radiation of the Long Wave-length Emitted by Black Bodies at Different Temperatures", *Sitzungsberichte der Akad. Wiss*, 335-348.
- Schrödinger, Erwin (1926a). "Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)" [Primera], *Ann. Phys.*, 79, 361.
- Schrödinger, Erwin (1926b). "Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung)" [Segunda], *Ann. Phys.*, 79, 489.
- Schrödinger, Erwin (1926d). "Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung)", [Tercera], *Ann. Phys.*, 80, 437.
- Schrödinger, Erwin (1926e). "Quantisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung)", [Cuarta], *Ann. Phys.*, 81, 109.
- Sommerfeld, A. (1956). *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Academic Press Inc., Publishers. New York, p. 150.
- Wood, R. W. y Gaviola, E. (1928). "XXIV. Factors governing the appearance of the "Forbidden Line" 2656 in the optical excitation of mercury. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 6, N.º 35, 271-276.