UNNOBA
NÚCLEOS
Revista científica

SUMARIO

#4 FORMACIÓN PARA EL DESARROLLO HUMANO

Edita

CEDi

CEDi Centro de Edición y Diseño. UNNOBA
DCV Ma. de las Mercedes Filpe

Callao 289 3.° piso, CP. 1022
Tel 54 11 53531520. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina

Diseño y diagramación
CEDi Centro de Edición y Diseño
Coordinador: DCV Cristian Rava,
DCV Claudia Di Paola, DCV Bernabé Díaz

Corrector de estilo: Mariángel Mauri
Fotografía: DG Sofía Ginestra

Impresión
Imaginaria S.A. | Presspoint

Año 3 N.° 4
Abril de 2017
Tirada 500 ejemplares
ISSN 2408-4492
Queda hecho el depósito que marca la ley 11723

Se invita a potenciales colaboradores a remitir sus trabajos al CEDi (cedi@unnoba.edu.ar)

Sede Junín
Libertad 555, CP. 6000
Tel 54 236 4407750
Junín, prov. de Buenos Aires, Argentina

Sede Pergamino
Monteagudo 2772, CP. 2700
Tel 54 2477 409500.
Pergamino, prov. de Buenos Aires, Argentina

www.unnoba.edu.ar

EDITORIAL

Acercamos al amable lector el cuarto número de nuestra revista de divulgación científica *NÚCLEOS,* de la Universidad Nacional del Noroeste de la Provincia de Buenos Aires, en el que se tratan asuntos de diversa naturaleza, referidos a distintos campos de la actividad científico-tecnológica, de gran relevancia, con interesante e importante temática.

En la página 4, Juan C. Flores Arraya construye un fascinante símil entre un fenómeno básico de la física, las llamadas transiciones de fase, y un fenómeno histórico-antropológico: el colapso de antiguas civilizaciones.

Pasamos a la astronomía en la página 12. Allí Claudia Scoccola nos habla sobre cómo se construye nuestra actual visión del Universo.

En la página 21, Luis J. Lima nos presenta un tema tecnológico de inmensa importancia: la resistencia de los cuerpos materiales.

Para finalizar, en la página 44 Edgardo Ortiz Jaureguizar y Paula Posadas, en una vena histórico-biológica, nos hablan sobre la paleomastozoología en nuestro país en los últimos treinta años.

Confiamos plenamente en que este abanico de problemáticas tan variadas pueda suscitar el interés de nuestros lectores en esta cuarta entrega.

Dr. Ángel Luis Plastino
Director revista NÚCLEOS

LUIS J. LIMA

ACERCA DEL ESTUDIO DE LA RESISTENCIA DE LOS CUERPOS MATERIALES[1]

La humanidad progresa a pasos agigantados pero, si bien la tecnología
se socializa con enorme rapidez, el conocimiento puro
queda restringido a un número muy reducido de individuos.

José María Bermúdez de Castro, *La evolución del talento.*

EXORDIO

Lo que Bermúdez de Castro afirma en forma genérica, se da también, por supuesto, en las ingenierías, donde dicho desfase puede tener consecuencias más que complejas, particularmente, en la ingeniería estructural. Ello se debe a que en una época en que —más allá de sus fuertes limitaciones intrínsecas— la computación parece no tener límites en su capacidad de afrontar nuevos problemas y de encarar los viejos con más detalle cada vez (las más de las veces innecesariamente), esta realidad evidente representa, en alguna medida, un grave problema, pues, por ese camino, se recurre a *modelos matemáticos* cada vez más complejos cuyo manejo conceptual requiere una formación teórica básica mucho más profunda y abarcadora. Esto no siempre —o, mejor dicho, casi nunca— ocurre: en buena medida porque no se les transmite adecuadamente a los ingenieros proyectistas de estructuras esta compleja circunstancia y los serios inconvenientes que esto les puede ocasionar en su vida profesional. Es demasiado frecuente que quien dispone de un programa de cálculo complejo lo opere sin tener, ni remotamente, la capacidad mínima imprescindible para hacerlo. Y así son los resultados que se obtienen.

Estas dos situaciones se resuelven con educación, profundizando la formación teórica, por un lado, a fin de ir formando recursos humanos que puedan comprender y manejar con solvencia modelos matemáticos complejos y, por otro, informando adecuadamente sobre cuál es la verdadera utilidad de los programas de computación destinados al estudio de los *cuerpos materiales* denominados estructuras resistentes, pues en tales casos, en general, son tan inconducentes los modelos demasiado elementales como los excesivamente complejos. El presente escrito busca colaborar en la solución del primero de estos problemas.

Para comenzar partiremos de la siguiente premisa insoslayable: el ingeniero debe poder encarar cualquier problema de su especialidad con papel y lápiz y, una vez hallada una solución aparentemente satisfactoria, recién entonces habrá de recurrir a la informática para afinar su solución. El camino nunca puede ser el inverso, al menos, si se pretende llegar a resultados tanto de utilidad pública cuanto ingenierilmente satisfactorios.

1. POR QUÉ ESTUDIAR LOS CUERPOS MATERIALES

La importancia que tienen los cuerpos sólidos en todos los aspectos de la vida humana es más que evidente y no requiere mayor fundamentación.[2] Su importancia se basa en el tipo de prestaciones que ellos brindan al hombre, las que se apoyan en la forma en que se comportan —diremos: de la forma en que reaccionan— frente a acciones externas de variado tipo: eléctricas, térmicas, mecánicas. Es precisamente esto último, la reacción de los cuerpos materiales frente a acciones externas de tipo mecánico, las que interesan en el caso de las estructuras resistentes.

En estas condiciones, "estudiar" el comportamiento de un cuerpo material significa poder prever su reacción frente a las acciones externas que correspondan. En otras palabras, estudiamos los cuerpos resistentes para poder predecir su comportamiento bajo determinadas acciones y en circunstancias bien definidas y determinar, de esta forma, su posible utilización para los fines propuestos.

Cuando nos referimos al estudio de los cuerpos materiales denominados estructuras resistentes,[3] esto implica que queremos conocer de ellas todas las propiedades que las hacen aptas para tal fin y las alteraciones que por tal motivo sufren respecto del estado "descargado"[4] en el que se encontraban antes de la aplicación de las cargas consideradas. Todo ello para cualquier estado de cargas posible y para cualquier secuencia de aplicación de ellas. En resumen, lo que queremos saber respecto de las estructuras resistentes cuando las "estudiamos" es lo siguiente:

a) Cómo lograr su equilibrio frente al sistema de referencia que se adopte: en el presente caso, la corteza terrestre, lo que lleva a definir los vínculos necesarios para que la estructura no se desplace respecto de ella, los que, diremos, constituyen sus apoyos.

a) Cómo va a cambiar de forma la estructura en función de las cargas actuantes y de los apoyos disponibles (deformaciones específicas, giros, corrimientos).

c) Qué esfuerzos internos habrá que resistir para que ello sea posible y que, además, lo sea con adecuada seguridad. Esto se logra mediante la determinación de las trayectorias que va a seguir, en el interior del cuerpo, cada una de las cargas actuantes para "trasladarse" de sus puntos de aplicación a los apoyos en el terreno. La teoría matemática que interpreta estos fenómenos físicos —y que intentaremos esbozar en este artículo— lo hace mediante la construcción de una serie de diagramas de "esfuerzos internos" correspondientes a lo que se supone que son las componentes primarias que permiten reconstruir las cargas actuantes en cada punto del cuerpo en magnitud, dirección y sentido. Se trata de los diagramas de momentos (flectores y torsores), esfuerzos normales (compresión y tracción) y esfuerzos de corte. En conclusión, ellos nos indican qué tipo de esfuerzos habrá que resistir en cada uno de los puntos de la estructura —físicamente hablando, en cada una de sus "regiones"— [5] y, a partir de ello, poder decidir cuáles van a resistir bien y cuáles no y con qué seguridad lo harán.

En otras palabras, lo que se busca es prever el *comportamiento resistente,* bajo diversas circunstancias, del cuerpo material analizado.

Debe quedar bien claro antes de proseguir que lo que se hace es *verificar* una estructura ya definida. ¿Quién define entonces la estructura que analizamos? Lo hace el mismo proyectista en una etapa del proceso del proyecto previa al cálculo: la etapa en que el proyectista *piensa* el problema que tiene que resolver e imagina, basándose en sus propios conocimientos teóricos y prácticos sobre el tema, cuál podrá ser la estructura que lo resuelva mejor. Esta se va a transformar en la "estructura dada", la que luego se verificará y ajustará en función del cálculo. Es esto lo que quisimos expresar cuando dijimos que "el ingeniero debe poder resolver cualquier problema de su especialidad con papel y lápiz". El lector ya está en condiciones de comenzar a comprender por qué, para proyectar estructuras complejas, se requiere una extensa y bien fundada formación teórica básica previa que ningún programa de cálculo, por completo que sea, puede sustituir. De aquí en más nos ocuparemos principalmente de esa formación teórica que ayuda al ingeniero a "pensar correctamente", pero que no puede reemplazar de ningún modo el proceso creativo, solo ayuda. Pero puede ayudar mucho.

Estrictamente hablando, la única forma efectiva de estudiar y comprender el comportamiento resistente de un cuerpo material consiste en analizarlo experimentalmente, es decir, construir el cuerpo cuyo comportamiento se desea conocer, someterlo a los estados de carga previstos y observar con suficiente precisión los cambios que sufre. Evidentemente, en muchos casos esta no es una solución viable, por lo que resulta necesario sustituirla.

En el estado actual de nuestros conocimientos ello se logra mediante la construcción de teorías de base matemática que representen suficientemente bien el comportamiento estructural que se desea conocer. Estas teorías se apoyan y se validan con base en resultados experimentales adecuados y suficientes, lo que les permite constituirse en *representaciones válidas* de los fenómenos físicos que abarcan. Más allá de la indiscutible utilidad de estas teorías, hay algo que debe comprenderse perfectamente desde un principio. De acuerdo con Weinberg (2011): "La matemática misma no es nunca una explicación de algo: es solo el medio que utilizamos para explicar un conjunto de hechos a partir de otros y (constituye) el lenguaje en el que expresamos nuestras explicaciones".[6]

En estas condiciones, los caminos teóricos para estudiar las estructuras resistentes se apoyan en la representación matemática de fenómenos físicos determinados experimentalmente; una forma de representación que ha recorrido un largo camino desde sus inicios hasta llegar al actual concepto de "modelo matemático".

Pero vamos por parte, pues hemos introducido una serie de conceptos que, antes de proseguir, deben ser adecuadamente definidos y analizados en detalle.

2. ALGUNAS DEFINICIONES NECESARIAS

Como decíamos, va a ser necesario, antes de entrar de lleno en el tema, definir con cierta precisión algunos conceptos que van a ser esenciales para comprender con más facilidad la teoría que expondremos.

Un *cuerpo material* es una porción finita de materia en estado sólido, delimitada espacialmente por una forma geométrica cerrada bien definida. Las *propiedades mecánicas* de este cuerpo material, que son las que gobiernan su deformabilidad y capacidad resistente, dependen tanto de las propiedades físicas del material cuanto de las propiedades geométricas de la forma que lo contiene. A partir de esta definición resulta evidente que las *estructuras resistentes*[7] de la ingeniería son todas ellas cuerpos materiales.

Tenemos, entonces, una primera constatación interesante: no son los materiales los que resisten sino los cuerpos que con ellos se construyen, a los que normalmente se denomina estructuras resistentes. Por ejemplo, si se le pregunta a cualquier persona si el acero resiste compresiones, la respuesta casi unánime va a ser que sí. Sin embargo, una cadena de acero, o un cable del mismo material, no lo hacen. Desde el punto de vista resistente, estas dos estructuras de acero, la cadena y el cable, son equivalentes: resisten bien tracciones y no resisten compresiones.

Pero su capacidad resistente no agota las posibilidades estructurales de los cuerpos. Naturalmente, ellos deben resistir, pero cuando se los emplea en relación con una actividad humana, además de resistir, deben hacerlo con adecuada seguridad. Aparece entonces un concepto esencial de las estructuras resistentes: su ductilidad, a la que podríamos definir, en una primera aproximación, como el comportamiento de un cuerpo material que indica que este se está acercando a su rotura. La cadena del ejemplo anterior es una estructura frágil, pues en general se rompe cuando lo hace el primer eslabón, cosa que normalmente ocurre sin aviso previo.[8] Por el contrario, un cable es una estructura dúctil, pues los primeros que se rompen son los hilos menos resistentes, lo cual resulta evidente a simple vista, y solo se rompe el cable cuando ya se han roto previamente una cantidad apreciable de hilos.[9]

Cuando a un cuerpo material libre en el espacio se le aplican cargas externas, este se pone en movimiento o cambia su velocidad de desplazamiento (si inicialmente lo estaba). Por el contrario, si el cuerpo está firmemente vinculado a la corteza terrestre, entonces, como no se puede desplazar, se deforma,[10] pues no existen en la naturaleza cuerpos indeformables. Esta deformabilidad de los cuerpos cargados es la que les permite generar las fuerzas internas capaces de equilibrar las cargas externas que les son aplicadas. Esto, a su vez, las habilita para oponerse en cierta medida a las deformaciones, pues los cuerpos cargados se deforman la mínima cantidad necesaria como para generar las fuerzas internas que les impidan seguir deformándose. Estas cualidades, por su parte, implican que las estructuras resistentes poseen *capacidad portante*, es decir, *resistencia:* aptitud para *trasladar cargas* entre diferentes lugares del espacio físico.

En cuanto a qué es un modelo matemático,[11] podemos decir que es una interpretación empirista de la realidad, un artefacto teórico que constituye una imagen abstracta del dato empírico. El discurso de la ciencia sirve de vínculo entre la *realidad empírica* y la *forma teórica*.[12]

La diferencia entre lo empírico y lo formal no es otra cosa que la diferencia entre lo constatable experimentalmente y el lenguaje artificial mediante el cual ese constatable es representado y se hace inteligible.

En este contexto, entendemos la ciencia como lo que vincula epistemológicamente un *objeto real* sobre el cual se debe indagar: la estructura, y un *objeto artificial* destinado a reproducir en sus efectos al objeto real: el modelo matemático que la interpreta.

Como *objeto artificial,* el modelo es controlable, es decir que se puede prever de qué manera reaccionará en el caso de que se modifique uno cualquiera de sus elementos componentes. Esta *previsibilidad* es lo que constituye la *transparencia* teórica del modelo y surge del hecho de que este está construido de manera tal que la opacidad atribuida a lo real no se reproduzca en él. Desde este punto de vista, podemos decir que el modelo no es una transformación práctica de lo real, de *su* real, pues pertenece al campo de la pura invención y está dotado, consecuentemente, de una "irrealidad" formal.

Nuestros modelos, que son puramente teóricos, o matemáticos, están construidos a partir de un conjunto de hipótesis, que se supone completo respecto del dominio estudiado y cuya coherencia y el posterior desarrollo deductivo con el que, a partir de ellas, se construye la teoría están garantizados por un código matemático.

La no coincidencia exacta del *hecho físico* con el *modelo matemático* que pretende representarlo permite construir, para cada caso particular, varios *modelos* distintos, según los contextos y las circunstancias que se consideren y los enfoques que se utilicen en ellos para efectuar el análisis. Esto implica que, a partir de un determinado problema físico que se quiera resolver, se pueden construir distintos modelos matemáticos que lo interpreten, cada uno de los cuales en general posibilitará diferentes generalizaciones y conclusiones.

En resumen, y volviendo al origen de estas consideraciones sobre el empleo de la herramienta matemática en el estudio de las estructuras resistentes, un esquema matemático construido a partir de una estructura real es un "modelo" en el marco de una teoría formal hipotético-deductiva, si y solo si todos los axiomas de esta teoría son válidos en la estructura considerada.

Para concluir este aparado, resulta interesante transcribir el siguiente comentario de Gregory Chaitin (2015):[13]

> El proceso mediante el cual se construye un modelo se integra por los siguientes pasos: 1) establecimiento de los *axiomas*; 2) desarrollos analíticos que se construyen a partir de ellos; 3) obtención de los modelos. Luego, los *axiomas* constituyen un "sistema condensado" que contiene (o del que se derivan) todos los modelos, de allí la importancia esencial de encontrar todos, y solo, los axiomas necesarios, definirlos con precisión y comprender en profundidad sus significados estructurales.

3. LA REALIDAD DE LA INGENIERÍA

La ingeniería no puede consistir (bajo ningún aspecto, y debido a que se trata de una actividad esencialmente creadora) en cargar un programa de cómputo electrónico y esperar sus resultados. El problema es totalmente al revés: un programa de cálculo electrónico, por sofisticado que sea, nunca es más que una herramienta para verificar que las ideas producidas y desarrolladas por el ingeniero son aceptables y dan una buena respuesta al problema que les dio origen.

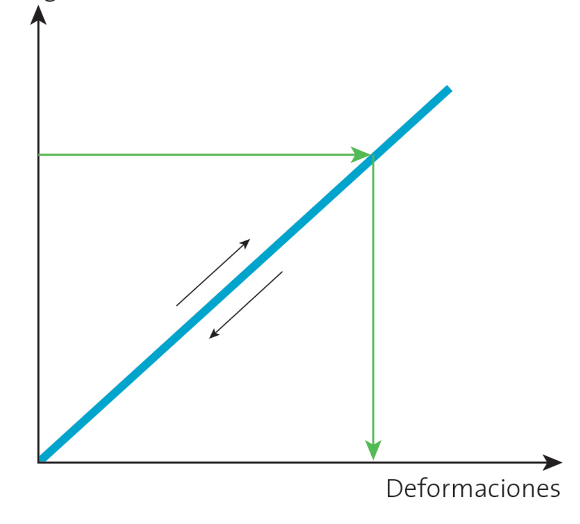
Lo que terminamos de decir no debe malinterpretarse: el hecho de que existan programas de cálculo muy completos y abarcadores constituye una excelente ayuda para los buenos ingenieros —los que son capaces de generar soluciones originales para problemas también originales—, pues les permiten encarar proyectos más audaces y comprometidos. Pero esto tiene una contracara que no siempre —o casi nunca— se tiene en cuenta: el empleo de estos programas, que muchas veces requieren un especialista informático para operarlos, obliga a quien se sirve de ellos a saber mucha más ingeniería que antes. A diferencia de los programas electrónicos de dibujo técnico, que han sustituido totalmente a los antiguos dibujantes (los de paralelógrafo, compás y escuadra), los programas de cálculo jamás van a sustituir al ingeniero en su actividad creativa. Pero sí lo van a ayudar, y mucho, en la puesta en funcionamiento de modelos matemáticos más aproximados y, por consiguiente, más complejos, de los cuerpos que estudia.

4. ACERCA DE LA RESISTENCIA DE LOS CUERPOS MATERIALES

El iniciador de los estudios referidos a la *resistencia de los cuerpos materiales* fue Galileo Galilei quien, a comienzos del siglo XVII, imaginó una ciencia que estudiara la fractura (hoy se dice, en general, resistencia o también rotura) de los cuerpos, a la que con el tiempo pasó a denominarse resistencia de materiales. Hoy sabemos que, dada la enorme variedad de materiales aptos para construir cuerpos capaces de transmitir cargas, no se los puede estudiar a todos mediante la misma ciencia. De hecho existen muchas *resistencias de los cuerpos materiales*, tantas como grupos de materiales con diferentes propiedades básicas, por ejemplo, acero, maderas, tierra, rocas, hormigón armado, etc. De todas formas, debido a la simplicidad de su planteo teórico y a la versatilidad de sus posibles aplicaciones, hay una que predomina netamente sobre todas las demás y que recibe el nombre[14] de resistencia de materiales. Si bien solo es estrictamente aplicable a materiales como el acero cuando las estructuras construidas con él trabajan bajo cargas de servicio (por ejemplo, no se puede calcular en forma directa en ningún caso la seguridad a rotura de una estructura), dada la sencillez operativa que muestra, se la aplica a una gran variedad de materiales, incluso a materiales compuestos, como el hormigón armado, haciendo, naturalmente, las adaptaciones específicas que cada caso requiere.

La resistencia de materiales es una teoría hipotético-deductiva que debe la sencillez de sus procedimientos a la simplicidad de su hipótesis básica, pues supone que los materiales que constituyen las estructuras que con ella se pueden estudiar son continuos, homogéneos, isótropos y, fundamentalmente, linealmente elásticos. Este último supuesto, en el cual se apoya básicamente su simplicidad operativa, supone dos cosas esenciales (Figura 1): que las deformaciones que sufren los cuerpos son proporcionales a las cargas a ellos aplicadas y que todo el trabajo que se les entrega al cargarlos se transforma en energía interna de deformación, la cual se recupera como trabajo, sin ningún tipo de pérdida, si se le permite al cuerpo recobrar su estado inicial no deformado.[15]

Figura 1



5. FUNDAMENTO DE LA RESISTENCIA DE MATERIALES DE BASE ELÁSTICA

A fin de evitar ambigüedades interpretativas, la resistencia de materiales elástica será denominada aquí Teoría de la Elasticidad, que es un nombre mucho más apropiado.

5.1. Hipótesis que fundamentan la Teoría de la Elasticidad

Si bien los cuatro postulados básicos enunciados en el apartado precedente delimitan con buena precisión las posibilidades de aplicación estructural de la Teoría de la Elasticidad, es decir, definen bastante bien el tipo de cuerpos materiales a los que les es aplicable, cuando se entra de lleno en estas aplicaciones (que no son otra cosa que rigurosos desarrollos matemáticos), dicha “buena” precisión en las posibilidades de su utilización va a resultar insuficiente y, para mejorarla lo necesario, habrá que plantear un conjunto bastante numeroso de hipótesis complementarias y definiciones específicas que lo posibiliten.[16] [17] Lo que se busca, al intentar fundar en forma matemáticamente adecuada la Teoría de la Elasticidad, es lograr que ella habilite el “estudio de las características resistentes de objetos que se describen por sus propiedades mecánicas, las que se adoptan como axiomas básicos de esta teoría”,[18] lo que significa ajustar dicha teoría a los requisitos de una de las estructuras básicas de las matemáticas: la axiomática. Los “objetos” señalados no son otros que las estructuras resistentes, y la teoría nos conduce a la construcción de *modelos matemáticos* que las representen adecuadamente. Luego, lo primero que debe discernirse es cuántos y cuáles son los *axiomas básicos* que se necesitan para definir sin ambigüedades el comportamiento resistente de las estructuras, en otras palabras, cuántos y cuáles son los axiomas básicos *necesarios* y *suficientes* para fundamentar la teoría, incluyendo como axiomas, como ya adelantamos, hipótesis y definiciones.

En este encuadre general, y en el marco que proveen la geometría de Euclides y la física de Newton, las hipótesis que fundamentan la Teoría de la Elasticidad son las siguientes:

5.1.1. Hipótesis básicas.[19] Deben cumplirse en todas las aplicaciones de la teoría y establecen que los cuerpos que se estudian deben ser:

1) Continuos;

2) Homogéneos;

3) Isótropos;

4) Con *relación biunívoca* entre cargas y deformaciones;

5) Con *relación lineal* entre cargas y deformaciones;

6) Con *relación elástica* entre cargas y deformaciones;

***5.1.2.* Hipótesis complementarias.** Se trata de hipótesis simplificativas, en su mayoría utilizadas en el cálculo de *estructuras de barras*.

7) Las propiedades de los cuerpos son invariantes respecto al tiempo;

8) Los apoyos son indeformables;

9) En las estructuras de barras los *nudos* son indeformables;

10) Las deformaciones de las estructuras no tienen significación en los resultados;

11) En estructuras de barras no se toma en cuenta el trabajo de las fuerzas perpendiculares al eje de las barras;

12) Una sección normal inicialmente plana se mantiene plana hasta su rotura;

13) En las estructuras de barras sus deformaciones[20] están esencialmente originadas por los momentos flectores;

14) El principio de Barré de Saint-Venant se considera válido.

***5.1.3.* Definiciones.** Están destinadas a aclarar conceptos y a facilitar la resolución de casos específicos.

15) *Cuerpo material*: porción finita de materia en estado sólido que tiene una forma espacial perfectamente determinada.

16) *Barra:* cuerpo con una de sus dimensiones bastante mayor que las dos restantes.

17) *Placas-láminas:* cuerpo comprendido entre dos superficies sensiblemente paralelas, con una de sus dimensiones bastante menor que las dos restantes.

18) *Eje de un cuerpo:* curva que une los centros geométricos de sus secciones.

19) *Superficie media de una placa o lámina:* superficie equidistante a las que delimitan al cuerpo.

20) *Estructura:* cuerpo, o conjunto de cuerpos vinculados entre sí de alguna forma, capaz de realizar *trabajo mecánico*.

21) *Estructura de barras:* estructura resistente cuyos componentes son barras.

22) *Carga:* acción originada en causas externas que produce en una estructura sea deformaciones, sea esfuerzos internos.[21]

23) *Suficientemente aproximado:* resultado, hipótesis o supuesto que, aplicado a una estructura determinada y en el marco de una determinada teoría, permite garantizar que el comportamiento mecánico que esta nos presenta concuerda bien con el del hecho físico que se quiere representar.

24) *Adecuada seguridad*: estructura cuya probabilidad de falla o colapso es igual o menor que la establecida.

25) *Cuerpo en equilibrio*: situación de un cuerpo cuyas deformaciones internas se corresponden con las cargas aplicadas, por lo que el estado de "equilibrio interno" es un estado que solo se altera si existe una causa externa que origine la alteración.

5.2. Explicación y fundamentación de las hipótesis hechas

El conjunto de los axiomas que terminamos de establecer para fundar la Teoría de la Elasticidad, y algunos de ellos particularmente, requieren ser analizados con cierto detalle para así comprender mejor sus fundamentos estructurales.[22] De ello pasaremos a ocuparnos seguidamente.

Para comenzar, reiteremos que este conjunto de axiomas debe cumplir las siguientes condiciones de existencia, en su calidad de conjunto de *hipótesis básicas* de una teoría hipotético-deductiva: 1) los axiomas deben ser *compatibles entre sí,* es decir que, en base a ellos, no se pueda demostrar lícitamente una propiedad y su contraria; 2) los axiomas deben ser *independientes unos de otros,* en otras palabras, el conjunto no debe ser redundante.[23]

Antes de comenzar a analizar y desarrollar los supuestos sobre los que se fundamenta y construye la Teoría de la Elasticidad, debemos recordar y reafirmar el marco de referencia en el cual esta teoría es válida, pues a las hipótesis que definen dicho marco también habrá que tenerlas en cuenta y respetarlas. En tal sentido, el planteo de la teoría se efectúa en un *espacio cartesiano* de tres (3) dimensiones espaciales y una (1) temporal, en el cual es válida la *geometría de Euclides* y la *física de Isaac Newton*, por lo que, además de las hipótesis específicas de la Teoría de las Elasticidad, vamos a suponer también la validez de las que sustentan la geometría euclidiana y las leyes de Newton, algunas de las cuales, como los principios de *inercia* y de *conservación de la energía,* las utilizaremos permanentemente. El primero de estos principios nos dice que los cuerpos sobre los que no actúan fuerzas están en reposo o se mueven recorriendo una línea recta a velocidad constante; el segundo, que la energía no se pierde, solo se transforma.

El principio de *conservación de la energía* establece que en un sistema cerrado –como podemos considerar al ámbito terrestre– la cantidad de energía existente se mantiene constante, no aumenta ni disminuye, solo se transforma de una manera de manifestarse a otra. Si bien, en la realidad, este problema es sumamente complejo, en los sistemas mecánicos puramente elásticos, como el que estamos estudiando, se simplifica enormemente porque nos ocuparemos solamente de dos de sus formas de manifestarse: 1) el *trabajo,* que es el producto de una fuerza por la distancia que ella recorre y que es el que realizan las cargas externas cuando el cuerpo sobre el que se las aplica se deforma, al que denominaremos en nuestro caso *trabajo mecánico externo* (U_e), y 2) la energía que el cuerpo acumula al deformarse, conocida como *energía elástica de deformación* (W_i), que es la energía almacenada en un cuerpo deformado y que se volverá a transformar en trabajo si se permite al cuerpo recuperar sus dimensiones iniciales.

5.2.1. **Hipótesis básicas.[24]** Deben cumplirse en todas las aplicaciones de la teoría, dado que constituyen su sustento esencial. En base a ello se postula que los cuerpos materiales que componen una estructura deben responder a las siguientes características:

1) Ser ***continuos***, lo que significa que, cuando un cuerpo se deforma, no aparecen discontinuidades en su masa (por ejemplo, fisuras), ni existen superposiciones entre los elementos puntuales que lo componen.

2) Ser ***homogéneos***, que quiere decir que en todos los puntos de su masa el cuerpo presenta las mismas propiedades; en el presente caso las mismas propiedades mecánicas.

3) Ser ***isótropos***, lo que indica que en todas las direcciones pasantes por un punto cualquiera de la masa del cuerpo sus propiedades son las mismas.

4) Mostrar, al ser solicitados, una ***relación biunívoca***, o sea, única, *entre las cargas aplicadas y las deformaciones* por ellas producidas en el cuerpo considerado, la cual será siempre la misma, independientemente del tipo de carga de que se trate y del número de veces que se la haya aplicado al mismo cuerpo.

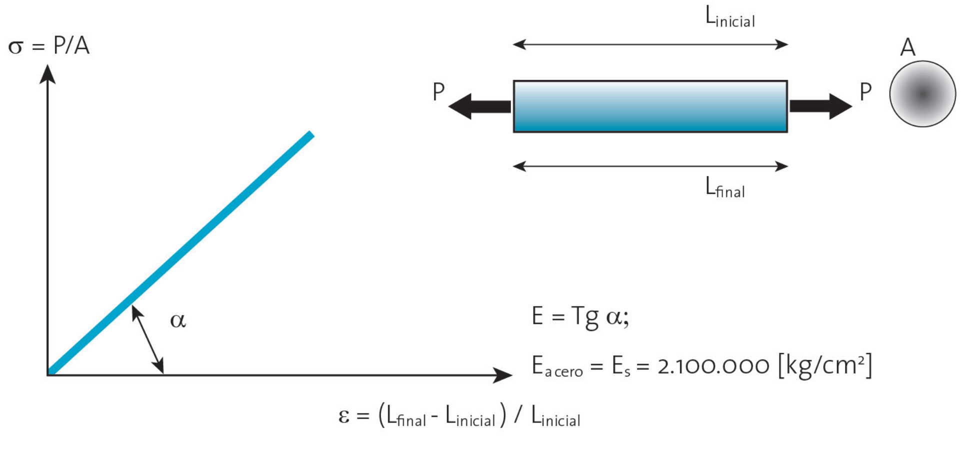
5) *La relación entre cargas y deformaciones es **lineal***, por lo que se puede representar mediante una expresión de la siguiente forma:[25]

$$y = K \, . \, x \qquad [1]$$

En ella la variable (x) representa las deformaciones, la variable (y) las cargas, y (K) es una constante de proporcionalidad —conocida como "módulo de deformación elástica" o también como "constante de rigidez"— cuyo valor depende del material que se haya utilizado para materializar el cuerpo, de las características geométricas de este y del tipo de carga actuante. Naturalmente, esta hipótesis se debe cumplir para cualquier tipo de carga que se aplique al cuerpo y, como al aplicar una carga a un cuerpo material este se deforma haciendo que la carga aplicada realice un trabajo, el tipo de deformación que sufra el cuerpo será el necesario para que la carga que la produce realice dicho trabajo. En consecuencia, si las cargas son fuerzas, las deformaciones serán variaciones de longitud y, si son momentos, serán rotaciones. En el presente caso, dadas las características de los cuerpos que se consideran, la aplicación del principio de conservación de la energía conduce a que el trabajo de las cargas aplicadas al cuerpo va a ser igual a la energía de deformación almacenada en él por esta causa.

6) *La relación entre cargas y deformaciones es **elástica***, lo que implica que, al descargar, la energía de deformación acumulada en el cuerpo durante el proceso de carga se recupera íntegramente como trabajo mecánico.[26] En otras palabras, la fórmula [1] vale tanto para cargas como para descargas, independientemente del número de veces que este proceso de carga y descarga se repita. Por esto la constante "K" se denomina *módulo de deformación elástica*. En el caso particular de los esfuerzos axiales, a este módulo se lo conoce simplemente como *módulo de elasticidad* y se lo designa con la letra (E).[27] El valor numérico del módulo de elasticidad constituye una constante de cada material con comportamiento elástico, la que se utiliza comúnmente para caracterizarlo.

Figura 2



Este valor de "E" depende de un conjunto de parámetros, principalmente del tipo de material constitutivo del cuerpo y de las características geométricas de este.[28] En el caso del acero se denomina *módulo de elasticidad* al obtenido ensayando a tracción pura un cuerpo cilíndrico, perfectamente definido, denominado *probeta*.[29] En este caso, a fin de dar mayor generalidad al valor de "E", las cargas de tracción aplicadas (P) se expresan por unidad de superficie, es decir, como "tensiones" (σ=P/A)[30] y las deformaciones sufridas por la probeta se expresan como "deformaciones específicas" (ε),[31] con lo que la expresión [1] se transforma en:

$$\sigma = E \, . \, \varepsilon \qquad [2]$$

Como se puede observar en la Figura 2, el valor numérico de (E) corresponde al de la tangente del ángulo que forma, respecto del eje de las deformaciones, la recta que relaciona a estas con las cargas.

La importancia de (E) en los casos prácticos consiste en que los *módulos de deformación elástica* correspondientes a otros tipos de carga se pueden expresar en función de (E).

***5.2.2.* Hipótesis complementarias.**[32] Se trata de hipótesis simplificativas utilizadas, la mayoría, en el cálculo de *estructuras de barras*. Normalmente restringen el campo de validez de los resultados obtenidos, por lo cual, al adoptarlas, hay que tener en cuenta estas consecuencias:

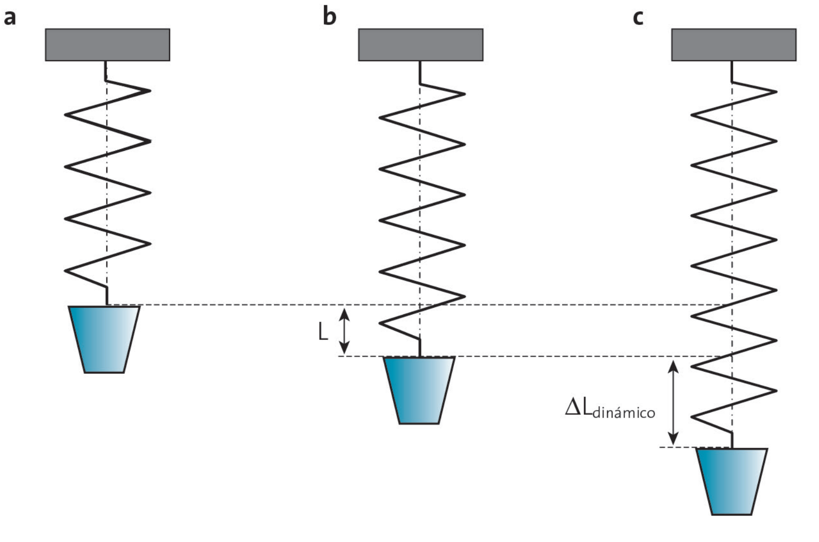
7) Tanto las propiedades geométricas como las físicas y, consecuentemente, las mecánicas de un cuerpo material se suponen invariantes en función del tiempo. Por consiguiente, el comportamiento resistente de los cuerpos materiales es también independiente del *tiempo*.

Esta hipótesis requiere algunas aclaraciones que permitan, por un lado, definir su campo de validez, pues no siempre se satisface, y, por otro, decidir cómo actuar en las situaciones en las que no se cumpla. Veamos entonces el problema un poco más en detalle:

Todos los cuerpos materiales sometidos a carga se deforman —en la naturaleza no existen sólidos perfectamente rígidos, es decir, con $E=\infty$— y la concreción de estas deformaciones requiere un cierto tiempo, al que denominaremos (t_d). A su vez, la aplicación de las cargas también requiere un cierto tiempo —en la realidad física en que nos movemos tampoco existen cargas instantáneas—. Indicaremos con (t_c) a este tiempo cuyo valor depende del tipo de carga de que se trate y de las circunstancias en que ellas actúen.

Por su parte, diremos que un cuerpo está en *equilibrio mecánico* bajo un determinado estado de carga, cuando las deformaciones que presenta son las que corresponden, en el marco de la presente teoría, al estado de carga aplicado.[33] Si para un determinado estado de carga, cuyo tiempo de aplicación es [t_{c1}], se tiene que para cualquier instante del proceso de su aplicación resulta [$\kappa(t_{c1}) > \kappa(t_d)$],[34] entonces en todos los momentos del proceso de carga el cuerpo está en *equilibrio mecánico*. En estas condiciones el proceso es *independiente del tiempo*.

Figura 3



Si esto no ocurre, el efecto de las cargas sobre el cuerpo cargado se magnifica y se tienen los casos de "impacto", en cuya discusión no entraremos. Para tratar de visualizar el significado de esta hipótesis, imaginemos un resorte cuya constante es "k" —esto significa que, para una carga ΔP, su alargamiento (ΔL) vale ($\Delta P.k$)— y que está cargado con un recipiente que se llena de agua (Figura 3). En la Figura 3.a se tiene el sistema descargado. Si el recipiente se va llenando de agua lentamente (Figura 3.b), de forma que en cualquier instante (t_1) del proceso de carga sea $L(t_1) = k.P(t_1)$, en todo momento el sistema está en *equilibrio mecánico*. Consecuentemente, el tiempo no interviene y tendremos un proceso de carga "normal" en el que la velocidad de deformación del resorte es siempre proporcional a la velocidad de aplicación de la carga. Si, por el contrario, el recipiente se llena muy rápidamente (Figura 3.c), el resorte se sobreestira en una longitud ($\Delta L_{dinámico}$) que, según el diagrama cargas-deformaciones implica un incremento de la carga de valor [$\Delta P_{dinámico} = \Delta L_{dinámico}/k$], este sobreestiramiento, que no corresponde a la carga realmente aplicada, genera en el resorte una fuerza opuesta que produce un acortamiento del mismo mayor que ($\Delta L_{dinámico}$), originándose vibraciones en él.[35] En este último caso la carga se magnifica produciéndose el fenómeno de "impacto" ya citado y, por consiguiente, la participación de la variable *tiempo* en la respuesta mecánica del cuerpo cargado.[36]

8) Los *vínculos* o *apoyos*, que establecen puntos de contacto comunes a la estructura y al sistema de referencia en el que esta se materializa, son indeformables e indesplazables. En la realidad esto no ocurre, pero como la deformabilidad de los apoyos no tiene nada que ver con la de la estructura a la que vincula a tierra,[37] se los puede considerar "estructuras independientes" de la que les dio origen y, si en algún caso sus deformaciones no pueden despreciarse, sus efectos se consideran como "acciones externas", que se conocen como *corrimientos de apoyos.*

9) En las estructuras de barras, los puntos de encuentro de dos o más componentes, denominados *nudos*, se consideran indeformables,[38] lo que implica que, por ejemplo, los ángulos entre dichos componentes no varían. Si en algún caso esto ocurriese, es decir, si el ángulo entre dos de las barras que llegan a un nudo varía, el efecto estructural de este hecho se incorpora al análisis como si fuese producido por una acción externa.[39]

10) Las deformaciones producidas por las cargas son *despreciables.* Este supuesto se puede expresar diciendo que las deformaciones producidas por un sistema de cargas dado en una estructura determinada son magnitudes físicas que no tienen significación en el cálculo de las solicitaciones que dichas cargas producen en la estructura: son *insignificantes*, lo que implica que los cálculos se pueden efectuar a partir de la estructura *no deformada,* es decir, considerando la geometría que tiene antes de aplicársele las cargas. Este supuesto requiere algunas consideraciones adicionales a fin de evitar ambigüedades en su interpretación: **a)** para calcular las solicitaciones en una estructura hay que aceptar que, al cargarla, ella se deforma. Debido a esto las cargas aplicadas realizan *trabajo estructural* (el producto de cada una de las cargas actuantes por el desplazamiento, en la dirección de cada una de ellas, de sus puntos de aplicación). En consecuencia, si no hay deformación en los puntos de aplicación de las cargas, no hay *trabajo estructural;* **b)** más allá de ello, y salvo que se lo indique expresamente, en general se puede suponer con suficiente aproximación que las deformaciones que sufre la estructura por causa del sistema de cargas aplicado a ella no alteran en forma apreciable[40] las solicitaciones que dicho sistema ocasiona en ella si se la calcula en base a la estructura no deformada. En estas condiciones se dice que se opera en base a *cálculos de primer orden* o "lineales". Hay que aclarar que el no cumplimiento de este supuesto no invalida la aplicación de la Teoría de la Elasticidad a la resolución de estructuras, porque aun en los casos en que las deformaciones no sean despreciables,[41] se las puede resolver por métodos elásticos. Lo que ocurre en estas circunstancias, como veremos en el apartado 5.3, es que deja de ser válido el principio de superposición de resultados, lo cual complica bastante los procesos operativos.

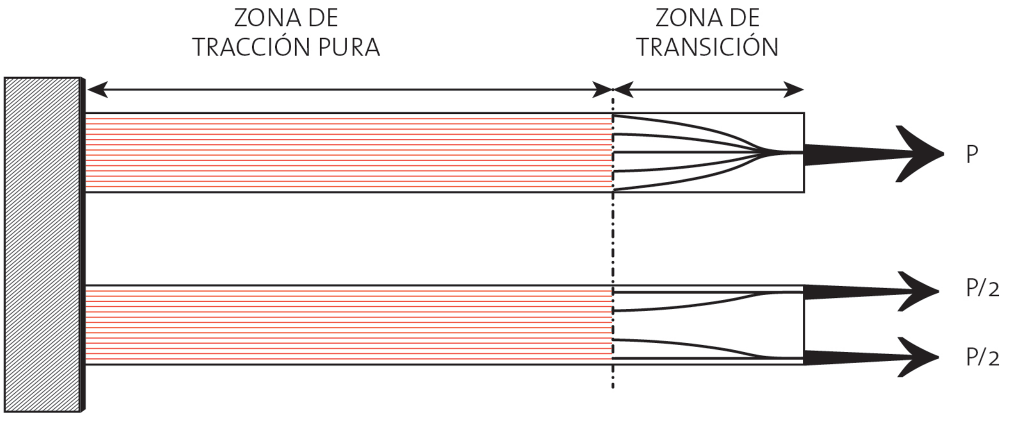
11) Salvo casos particulares específicos, en el cálculo de estructuras de barras no se toman en cuenta, en el *trabajo interno* de las barras, el trabajo que puedan realizar las tensiones normales (σ) perpendiculares a su eje.

12) Para el cálculo de los estados tensionales internos de una barra, en general se supone que *una sección normal*[42] *inicialmente plana se* mantiene *plana durante todo el proceso de deformación del cuerpo,* incluso hasta llegar a su rotura. De ser necesario, esta hipótesis se puede sustituir por una menos restrictiva que diga que dos secciones normales suficientemente próximas que sean inicialmente planas se deforman de tal modo, al deformarse el elemento que las contiene, que se las puede superponer mediante una traslación adecuada.[43]

13) Las deformaciones que sufre un cuerpo cargado están originadas por la acción de todas las solicitaciones que sobre él actúan, momentos flectores, esfuerzos normales, momentos torsores y esfuerzos de corte. En el caso de las estructuras de barras, normalmente se puede alcanzar una aproximación suficiente en los resultados considerando solo la acción de los momentos flectores, lo que simplifica mucho los procesos operativos. Cuando se emplee esta simplificación debe verificarse que en efecto sea aplicable.

14) El principio de Saint-Venant, que lleva el nombre de quien lo formulara, el matemático francés Barré de Saint-Venant, establece que: *Dados dos sistemas de cargas estáticamente equivalentes* (esto quiere decir que, en ambos casos, las cargas producen en la estructura considerada el mismo estado de solicitación), *pero conformados por acciones diversas, aplicados a dos estructuras iguales, la influencia de esta diferencia solo se observa en la inmediata vecindad de los puntos de aplicación de las solicitaciones y a una distancia suficiente de ellos no existe divergencia alguna en el estado tensional de las estructuras consideradas.* Para materiales efectivamente homogéneos, como podría ser el acero, Colonnetti (1941)[44] estima que la distancia necesaria para no tener ningún tipo de alteración es de 3 a 4 veces el mayor de los lados de la sección transversal de la barra. En materiales solo suficientemente homogéneos —o heterogéneos—, como sería el caso del hormigón, en general esta distancia se reduce a una vez dicho lado mayor.[45] En la Figura 4 se aplica este principio al caso de dos barras traccionadas mediante el análisis de las trayectorias de fuerzas en el interior de las mismas. Como se puede observar, estas solo difieren en la zona de transición, pero son exactamente iguales en el resto del elemento.

Figura 4



***5.2.3.* Definiciones.**[46] Destinadas principalmente a aclarar conceptos y a facilitar también la resolución de casos específicos.

15) *Cuerpo material.* Porción finita de materia en estado sólido que tiene una forma espacial perfectamente determinada. Las propiedades mecánicas del cuerpo quedan definidas tanto por las propiedades geométricas de su forma espacial cuanto por las propiedades físicas del material que lo constituye. Si bien en los materiales que cumplen con las hipótesis básicas su masa es un continuo tridimensional, en algunas circunstancias del análisis estructural (por ejemplo, en el caso de los programas de cálculo con computadoras, pues para estas el del continuo resulta un problema inabordable) debe suponerse que el cuerpo está constituido por un conjunto finito de elementos espaciales finitos.

16) *Barra.* Cuerpo material con una de sus dimensiones bastante mayor que las dos restantes. Si bien la relación de dimensiones para que se tenga una barra depende del tipo de elemento estructural y del material de que se trate, puede suponerse que esto ocurre cuando la más grande de sus dimensiones es cuatro (4) o más veces mayor que la mayor de las restantes. En estos casos la barra puede ser representada por su eje sin cometer errores de significación. Este eje, pese a ser matemáticamente una línea, conserva estructuralmente las propiedades mecánicas y geométricas de las secciones rectas del elemento estructural al que representa: área, momento estático, momento de inercia. Si la relación anterior no se cumple, no es aplicable al cuerpo la teoría de barras y deberá considerárselo como bidimensional, entre otras cosas porque deja de cumplirse la hipótesis de mantenimiento de las secciones planas.

17) *Placas-láminas.* Cuerpo material comprendido entre dos superficies sensiblemente paralelas (planas en el caso de las placas y curvas en el de las láminas) con una de sus dimensiones bastante menor que las dos restantes. Si bien la relación de dimensiones para que esto ocurra depende del tipo de elemento estructural y material de que se trate,[47] puede suponerse que esto ocurre cuando la menor de sus dimensiones es seis (6) o más veces menor que la que le sigue en magnitud, por lo que el cuerpo puede ser representado por su *superficie media* sin cometer errores de significación. Esta superficie media, a pesar a ser matemáticamente una superficie sin espesor, conserva estructuralmente las propiedades mecánicas y geométricas de las secciones rectas[48] del elemento estructural al que representa: área, momento estático, momento de inercia. Si esta relación no se cumple, no es aplicable al cuerpo la teoría de placas y deberá considerárselo como tridimensional.

18) *Eje de un cuerpo material.* En el análisis de las estructuras que satisfacen las presentes hipótesis su eje es la curva que une los centros geométricos de sus secciones y, por consiguiente, coincide con el eje geométrico.[49]

19) *Superficie media de una placa o lámina*. Superficie equidistante a las que delimitan al cuerpo. En el caso de las placas es un plano (plano medio) y en el de las láminas, una superficie curva (superficie media).

20) *Estructura.* Todo cuerpo material —o conjunto de cuerpos vinculados entre sí de algún modo— capaz de realizar *trabajo mecánico* resistiendo cargas y *trasladándolas* entre diferentes puntos del espacio.

21) *Estructura de barras.* Estructura resistente cuyos elementos componentes son barras.

22) *Carga*. Toda acción originada en causas externas[50] que produce sea deformaciones, sea esfuerzos internos en la estructura. Las más comunes son las fuerzas y los momentos, pero también son consideradas cargas, en el caso de estructuras estáticamente indeterminadas, los efectos de temperatura y los movimientos de los apoyos fijos.

23) *Suficientemente aproximado*. Resultado, hipótesis o supuesto que, aplicado al modelo matemático de una estructura determinada, permite garantizar que este va a simular un comportamiento mecánico cuya diferencia con el de la estructura real va a estar comprendido dentro de valores aceptables.

24) *Adecuada seguridad*. Se dice que una estructura posee "adecuada seguridad" cuando su probabilidad de falla es igual o menor que la aceptada en los códigos correspondientes[51] o la expresamente especificada para la obra de que se trate.

25) *Cuerpo material en equilibrio.* Si se aplica una carga a un cuerpo rígido con apoyos también rígidos, el equilibrio es instantáneo, independientemente de cómo se apliquen las cargas. En otras palabras, durante el proceso de carga el sistema siempre está en equilibrio. Estos son los que podríamos denominar resultados de la estática y no son más que idealizaciones matemáticas sin sentido físico. Pero, si se trata de cuerpos reales, es decir, *deformables*, entramos en el campo de las resistencias de materiales, aun cuando sigamos suponiendo que los apoyos son rígidos. En estas condiciones la deformabilidad de un cuerpo material, que se materializa mediante el reacomodamiento de sus elementos componentes en un nivel inferior de observación (cristales, moléculas, átomos), implica un proceso temporal que insume un cierto tiempo y lo mismo ocurre con la aplicación de las cargas (ver hipótesis 7). Por lo tanto, diremos que *un cuerpo material está en equilibrio* cuando, además de estar sometido a un sistema de cargas con resultante nula —en estos casos, como ya vimos, la resultante de las cargas o acciones externas es igual y contraria a la resultante de las reacciones—, en todo instante su estado de deformación se corresponde con el tipo de carga aplicado. Esto quiere decir que el estado de deformación no va a cambiar si las cargas actuantes no lo hacen.[52]

26) *Estado de referencia de un cuerpo.* Podríamos tomar como *estado de referencia* para el análisis del comportamiento mecánico de un cuerpo su estado descargado o, lo que en este caso es lo mismo, su estado no deformado, aceptando que un cuerpo elástico está en *estado descargado,* o en *estado no deformado,* cuando los diferentes elementos de volumen que lo componen y los diferentes elementos superficiales que lo limitan no están sujetos a la acción de ninguna fuerza externa. Sin embargo, como no es fácil decidir en la realidad cuándo un cuerpo está descargado en el sentido en que acabamos de definirlo,[53] en consecuencia, tomaremos como *estado de referencia* de un cuerpo material el estado de equilibrio interno a partir del cual se aplican las cargas cuyo efecto en él se quiere averiguar.[54]

6. ELEMENTOS Y BASES DE ANÁLISIS DE LA TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

Cuando las estructuras se hacen complejas, como ocurre con la gran mayoría de las que nos encontramos en la realidad, para encarar su resolución se debe recurrir a métodos de análisis más poderosos: algunos de los más conocidos son los métodos energéticos. Estos métodos deben su nombre a que se basan en el *principio de conservación de la energía*, el cual, en el presente caso, se puede expresar de la siguiente forma: *El trabajo realizado por las fuerzas externas actuantes sobre una estructura* (U_e) *se transforma en la energía de deformación* (U_i)[55] *que se desarrolla cuando la estructura se deforma para lograr su equilibrio.*[56] De él surgen las herramientas más poderosas para el análisis estructural. Dedicaremos el presente apartado al estudio de algunos de estos métodos. En lo que hace a los teoremas de uso más generalizado, solo los describiremos sin entrar en su demostración, pues ello escapa al marco del presente artículo. De todos modos, en cada caso se indica dónde encontrar su demostración.

A partir de la definición anterior quedó claro que en el presente texto solo nos ocuparemos de dos tipos de energía: el *trabajo* (U_e), que es el producto de una fuerza por la distancia que ella recorre, y la *energía elástica de deformación* (U_i), que es la energía almacenada en un cuerpo deformado, la que se vuelve a transformar en *trabajo* cuando al cuerpo se lo libera. Esta *energía elástica de deformación* está biunívocamente relacionada con los estados de deformación de los cuerpos deformables. Las expresiones matemáticas de ambos tipos de energía son las siguientes:

$$U_e = \int_{x_1}^{x_2} F_i\, dx; \qquad U_i = \int_V \varphi \, . \, dV \qquad [3]$$

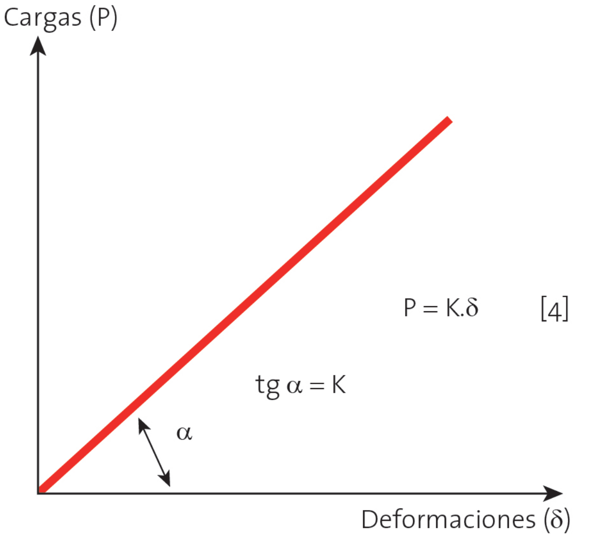
Donde (φ) es función de las seis componentes de deformación de un cuerpo en el espacio: $\varphi = \varphi(\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}; \gamma_{xy})$; y la integración se efectúa en todo el volumen del cuerpo. El concepto de *trabajo de una fuerza* es evidente y no requiere mayores explicaciones: Es el producto de la fuerza aplicada por la deformación del cuerpo en su punto de aplicación y en su dirección. Lo mismo ocurre con el de *energía interna de deformación*; energía que se determina a partir del estado de referencia (Ver nota 4 al final).

6.1. Trabajo de las fuerzas externas y energía interna de deformación

En los materiales con comportamiento mecánico de tipo lineal-elástico, la relación entre las cargas aplicadas y las deformaciones que ellas producen es una recta si se la representa en un diagrama de cargas-deformaciones, cualquiera sea el tipo de carga considerado y cualquiera sea el número de procesos de cargas y descargas que haya habido previamente (Figura 8).

En estas condiciones, las deformaciones totales (δ) producidas por las cargas[57] provocan, por un lado, que estas realicen un determinado *trabajo* (U_e) y, por otro, que el cuerpo al deformarse almacene *energía de deformación* (U_i), la que volverá a transformarse en trabajo cuando la carga se retire.[58]

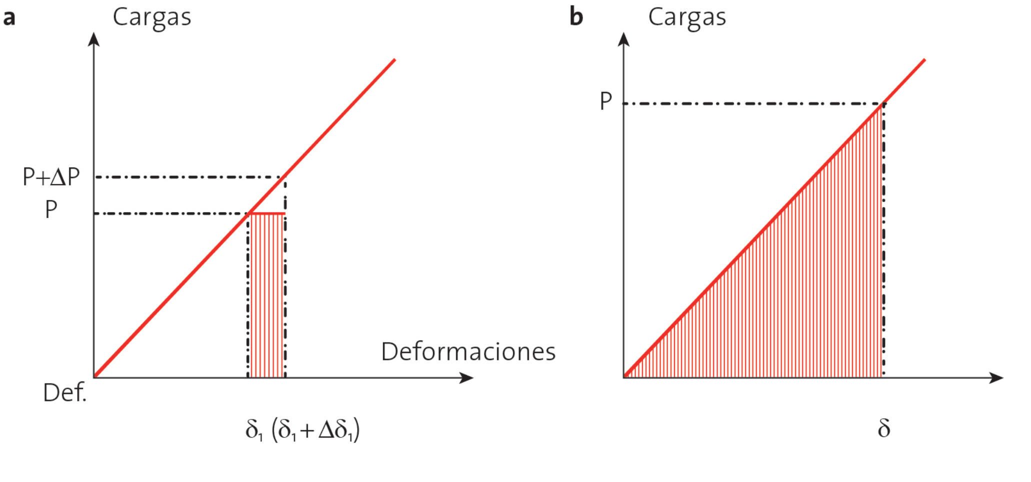
Figura 5



Sea entonces una carga (P) que se incremente en una magnitud (ΔP) suficientemente pequeña (Figura 6.a), la deformación del cuerpo cargado pasa entonces de valer (δ) a valer (δ + Δδ) y, despreciando los infinitésimos de orden superior, el trabajo realizado por (P) resulta ser:

$$\Delta U = P \, . \, \Delta\delta \qquad [5]$$

Figura 6



Haciendo tender a cero los valores incrementales y generalizando el resultado, se tiene que:

$$dU_e = P. d\delta \qquad [6]$$

El trabajo total que realiza la fuerza (P) desde el instante en que se la aplica hasta que llega a un valor (P) genérico, suponiendo que en todos los instantes del proceso existe equilibrio entre las cargas actuantes y las deformaciones que bajo ellas se producen, vale:

$$U_e = \int_0^{\delta} P.\,d\delta = P.\delta / 2 \qquad [7]$$

Que corresponde al triángulo rayado de la Figura 6.b.

Tratándose de un cuerpo elástico y suponiendo que la carga aplicada (P) es una fuerza (N) que origina en la estructura solicitaciones axiales,[59] las deformaciones (ΔL) son variaciones de longitud —alargamientos o acortamientos— (Figura 7), y la relación entre ellas se puede escribir de dos maneras distintas, despejando en cada caso una u otra de las magnitudes en juego —ΔL y N— a partir de la relación que las vincula, la que se obtiene de la expresión [4] cuando se sustituyen las cargas por tensiones normales (σ=N/A) y las deformaciones (δ) por variaciones de longitud específica ($\Delta L/L$), quedando la conocida fórmula que las relaciona: $\sigma = E.\varepsilon$. , luego:

$$(N/A) = E.(\Delta L/L)$$

Si se toma como variable independiente (ΔL), se tiene

$$N = (\Delta L.A.E) / L \qquad [8]$$

Y si es (N):

$$\Delta L = (N.L) / (A.E) \qquad [9]$$

Expresiones cuyos componentes tienen el significado siguiente:

L: longitud inicial del cuerpo que se deforma tomada en la dirección de la carga.

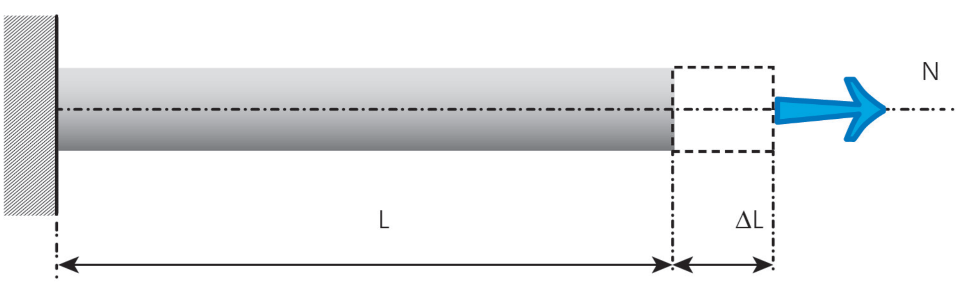
A: área del cuerpo que se deforma considerada perpendicularmente a la dirección de la carga.

E: valor del módulo de deformación elástico, o módulo de elasticidad, cuando la carga aplicada es una fuerza axial.

N: carga aplicada (fuerza axial).

ΔL: variación de longitud producida (ΔL=L. ε).

Figura 7



Las fórmulas [8] y [9] nos permiten calcular el *trabajo de las cargas externas* o la *energía elástica* acumulada en el interior del cuerpo debidos a las deformaciones que sufre al aplicarle las cargas, haciéndolo en función de las variaciones de longitud que sufre la pieza o del valor de la carga aplicada, respectivamente. Ello es posible en base al *principio de conservación de la energía,* que postula la igualdad entre trabajo de las fuerzas externas y energía de deformación elástica almacenada en el cuerpo debido a ellas.

$$U = U_e = U_i = (A.E/L) \int_{0}^{\Delta L} \Delta L.\, d\Delta L = \Delta L^2.A.E \,/\, 2.L \qquad [10]$$

$$U = U_e = U_i = (L/A.E) \int_{0}^{P} P.\, dP = P^2.L \,/\, 2.A.E \qquad [11]$$

6.2. Teorema del trabajo mínimo[60]

Este teorema expresa que, en un cuerpo en condiciones de equilibrio, *las tensiones internas producidas por un sistema dado de fuerzas externas son aquellas que hacen mínimo el trabajo de deformación*.

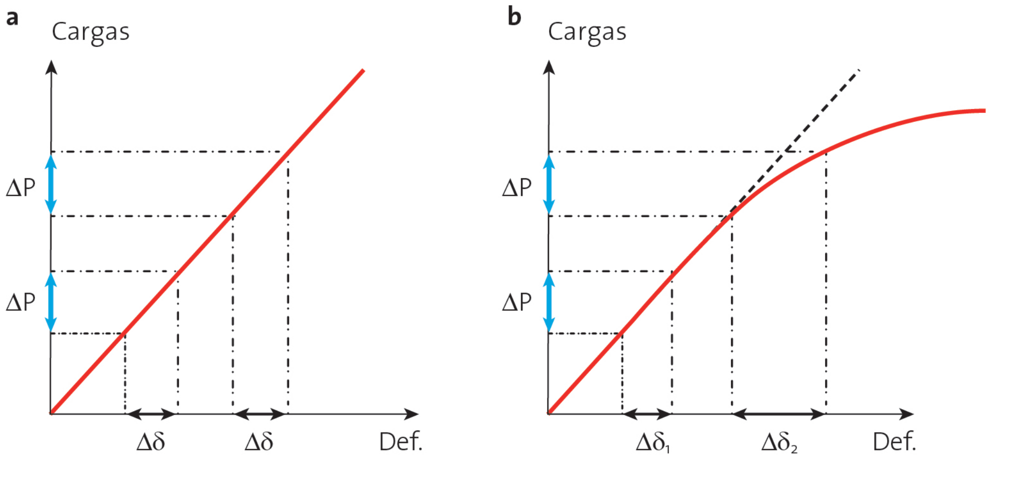
Para demostrarlo se procede de la siguiente forma: tomando como base el estado de deformación que se calcula por medio de la Teoría de la Elasticidad para un estado de carga dado que actúa sobre un cuerpo determinado, se supone que dichas tensiones se incrementan infinitesimalmente, pasando de un estado de deformación (ψ)[61] a otro $(\psi + \Delta\psi)$. En estas condiciones se demuestra que la variación (ΔU_i) del trabajo interno de deformación que sufre el cuerpo es siempre positiva, de donde resulta evidente que el trabajo interno de deformación calculado según la Teoría de la Elasticidad *es un mínimo*.

6.3. Principio de superposición de efectos y límites de su aplicación

Este principio lo desarrollaremos completo por dos motivos: por un lado, porque resulta imprescindible para el planteo de la Teoría de la Elasticidad tal como la conocemos y su empleo en sus desarrollos es permanente y, por el otro, porque es esencial (la demostración) para comprender los límites de aplicación de esta teoría.

Cuando sobre una estructura actúa un conjunto de cargas, el principio de superposición de efectos expresa que *la deformación de una estructura originada por la totalidad de las cargas actuando simultáneamente es igual a la suma de las deformaciones producidas por todas y cada una de las cargas actuando en forma individual.* En otras palabras, este principio expresa que el valor de la deformación producida por una cualquiera de las cargas no depende del estado de deformación preexistente —no depende de si ya han actuado, o no, algunas o la totalidad de las restantes cargas del conjunto—. El *principio de superposición,* que configura una herramienta teórica de gran potencia en los procesos de cálculo de estructuras resistentes, solo es válido en el caso de elementos estructurales en los que se cumpla la hipótesis de que existe una relación lineal elástica entre cargas y deformaciones, cualquiera sea el tipo de carga aplicada, lo que representa una fuerte limitación a sus posibilidades de uso.

Figura 8



La demostración del principio de superposición es inmediata pues, como se puede observar en la Figura 8.a, si la relación cargas-deformaciones es lineal, un incremento de carga de valor (ΔP) produce siempre un incremento de deformación de valor ($\Delta\delta$), independientemente del estado de carga a partir del cual se aplique (ΔP), cosa que no sucede si la relación entre cargas y deformaciones no es lineal (Figura 8.b). En consecuencia, a partir de este razonamiento parecería poder demostrarse que el cumplimiento de la *hipótesis de linealidad* es condición necesaria y suficiente para que el principio de superposición sea válido. Esta afirmación debe ser debidamente justificada.

Debemos considerar entonces, con cierto detalle, cuál es el significado estructural de la *hipótesis de linealidad,* que constituye una propiedad mecánica de las estructuras que no todas poseen, aun siendo elásticas. Recordemos que las propiedades mecánicas de una estructura dependen de dos factores: **a)** del material con el que esté construida y **b)** de su configuración geométrica. Además, nos vamos a encontrar con que, en estructuras construidas con el mismo material, las propiedades mecánicas no siempre son las mismas. Por un lado, pueden variar en función del tipo de solicitación actuante y, por otro, según las características geométricas de la estructura que se considere.

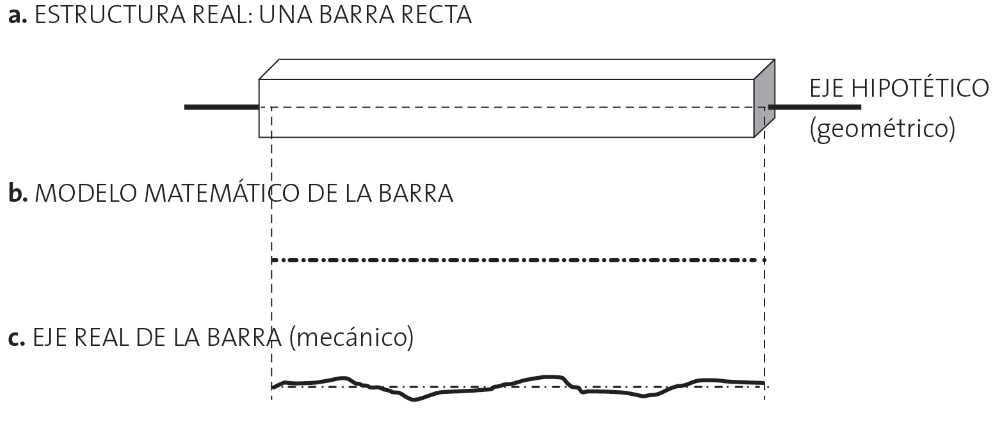


Figura 9

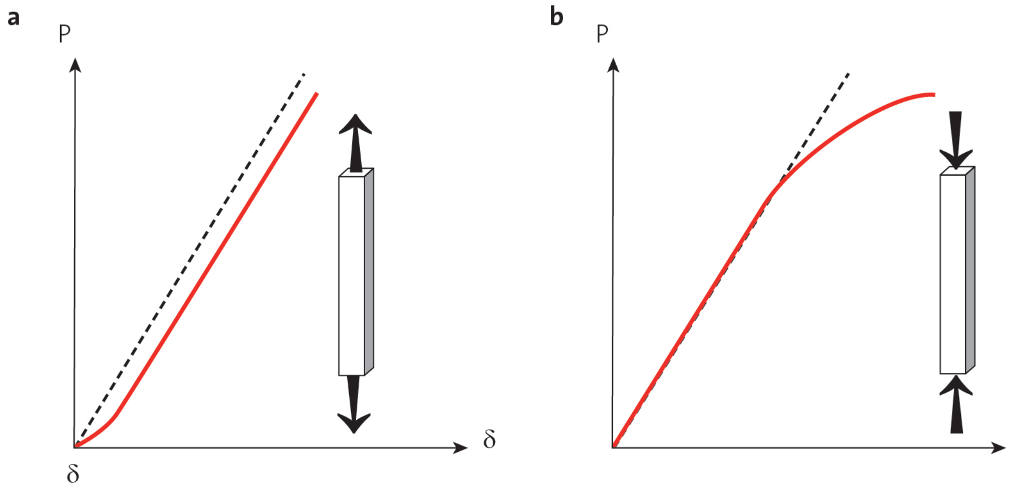
En el primer caso (no linealidad originada en el tipo de solicitación actuante) el comportamiento *no lineal* se origina en el hecho de que la hipótesis de que el material es *homogéneo* constituye siempre una aproximación, pues en la realidad no existe ningún material absolutamente homogéneo en el *nivel ingenieril* de análisis. Siempre hay heterogeneidades que, por pequeñas que sean, pueden tener consecuencias estructurales significativas según el tipo de solicitación de que se trate. En este caso, en las estructuras reales ocurre lo siguiente: en función de la hipótesis de homogeneidad, resulta que el eje de una barra prismática de sección constante y directriz recta es recto (Figura 9.a), por lo que su modelo matemático es una recta (Figura 9.b), pero en la práctica ingenieril, y debido a la heterogeneidad del material que constituye la barra considerada, el eje *mecánico* de la pieza va a ser una curva indefinida que se desarrolla en torno al eje recto hipotético (Figura 9.c).

Esto último trae como consecuencia que, si se aplica a la barra una solicitación axial, ella, además de estar sometida a esfuerzos normales, lo estará también a un estado indefinido de flexión, debido a la presencia de estas deformaciones inevitables. Es decir que, en la realidad, va a trabajar a flexión compuesta. Si la solicitación aplicada es de tracción, estos momentos flectores tienden a “enderezar” el eje real, el cual, cuanto mayor sea la solicitación de tracción actuante, más se va a acercar a su modelo matemático (Figura 10.a). Por el contrario, si se aplica a la barra una solicitación axial de compresión, el estado de solicitación de flexión que esta origina debido a las imperfecciones del eje real conduce a un aumento progresivo de dichas imperfecciones y se termina finalmente en el campo de los fenómenos de pandeo[62] (Figura 10.b). Este proceso —consecuencia del aumento progresivo de la carga axial— origina un incremento de las solicitaciones de flexión, debido al aumento que él mismo origina en la magnitud de los efectos de las imperfecciones. Estas solicitaciones crecientes de flexión que aparecen causan un incremento aún mayor de las excentricidades originadas por las imperfecciones, lo que conduce a que, a partir de un cierto valor de la carga de compresión, la no linealidad del proceso de carga que se desarrolla deja de poder ser ignorada y, en consecuencia,[63] a iguales incrementos de carga se tendrán cada vez mayores incrementos de deformación y el principio de superposición deja de poder ser aplicado.

Como queda claro, la heterogeneidad real que presentan todos los cuerpos materiales[64] hace que la hipótesis de linealidad elástica no se cumpla exactamente en los casos reales.

Aparece acá una característica interesante de las barras comprimidas: si son poco esbeltas (para entendernos digamos "si son suficientemente cortas") se rompen por agotamiento de su capacidad portante y el análisis se reduce a considerar las secciones por separado. Pero si son esbeltas llegan a su colapso por pandeo, es decir, por rotura de su equilibrio interno, antes que dicho agotamiento resistente se produzca. En esta segunda situación ya no es suficiente con verificar la resistencia de las secciones; hay que considerar la pieza en su conjunto, incluyendo en ello la forma en que se vincula con el resto de la estructura de la que forma parte.

Figura 10

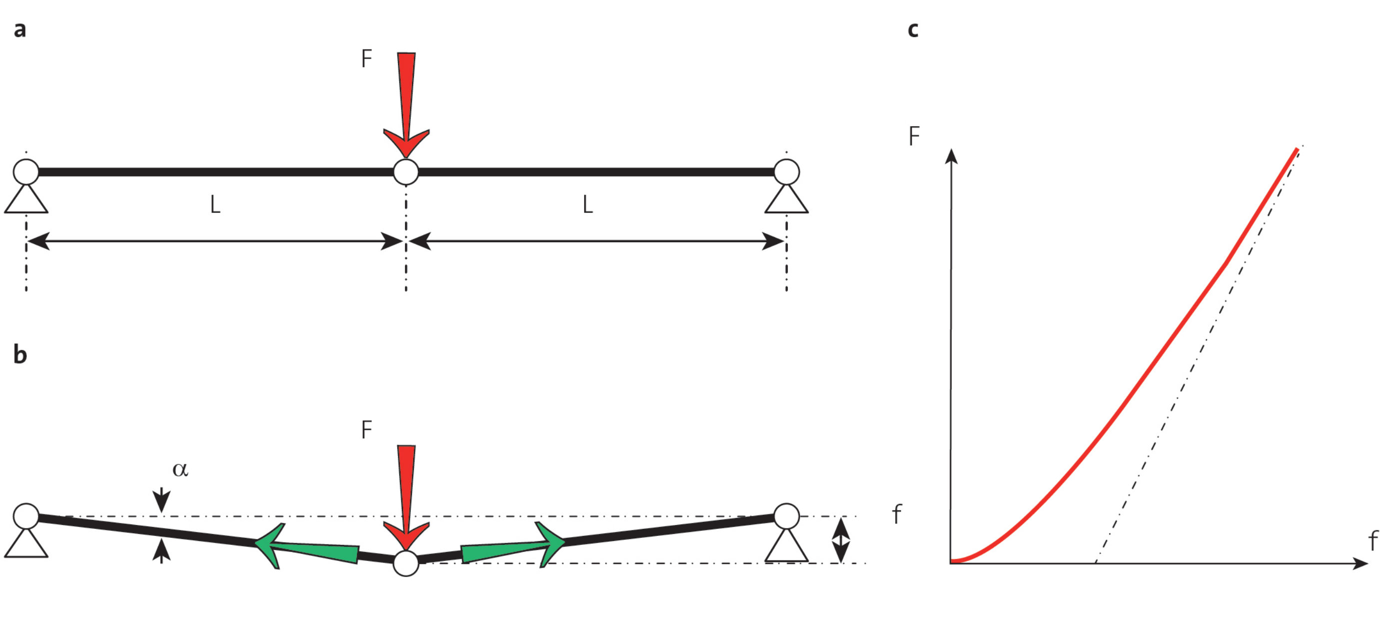


En la segunda de las situaciones señaladas (incidencia de la geometría de la estructura en el origen de la no linealidad), nos vamos a encontrar con que hay geometrías estructurales que son causantes de la no linealidad. En el siguiente ejemplo (Figura 11.a), en el que se presenta una estructura constituida por dos barras horizontales iguales unidas mediante una articulación y con apoyos fijos en sus extremos restantes, se trata de elementos traccionados en los que, como vimos, se puede ignorar la heterogeneidad del material. En este caso, la equilibrante de la carga actuante está generada por la componente vertical de la solicitación de tracción en las barras que constituyen la estructura (Figura 11.b):

$$F = 2 \,.\, N \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha \qquad [12]$$

En la posición inicial, con ambas barras horizontales, la estructura es totalmente incapaz de equilibrar la carga aplicada, por lo que la curva cargas-deformaciones es horizontal en su origen (tangente al eje de abscisas) y, al comenzar a actuar la carga —una fuerza vertical aplicada en la articulación central—, se produce una primera deformación que es suficientemente grande como para generar el equilibrio buscado (Figura 11.c). Luego, a medida que la carga aumente, a iguales incrementos de ella se tendrán aumentos de la deformación cada vez menores y, para cargas grandes, la curva que relaciona a estas con las deformaciones tiende a linealizarse y el proceso comienza a ser cada vez más parecido a uno en el que se cumpla la hipótesis de linealidad.

Figura 11



Como conclusión podemos decir que, para que el principio de superposición se cumpla, las deformaciones que producen las cargas actuantes no deben modificar, en forma apreciable, la solicitación por ellas originada. Para decidir esto no hay normas escritas, solo criterios generales, como los expuestos y, fundamentalmente, la buena formación y la experiencia del proyectista.

Como vemos, hay estructuras que son causantes de la no linealidad, como las columnas y los arcos, y otras que tienden a preservarla.

6.4. Principio de los trabajos virtuales[65]

Este principio, desarrollado por el matemático francés Jean Bernoulli en 1717, proporciona un método general para calcular alargamientos, acortamientos y cambios de pendiente en cualquier punto de una estructura. Teniendo en cuenta que, precisamente, estos son los datos que se deben conocer para poder prever el comportamiento bajo carga de una estructura, resulta evidente su importancia capital en la Teoría de la Elasticidad.

El principio de los trabajos virtuales se puede enunciar del siguiente modo: *En una deformación virtual de un cuerpo elástico que se encuentra en equilibrio, el trabajo virtual de las cargas aplicadas exteriormente es igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores originadas por aquellas, o energía de deformación*. Una *deformación virtual* es una deformación posible,[66] pero imaginaria, producida por una *carga virtual*; o sea, una carga posible pero imaginaria.

a) Se tiene un cuerpo con apoyos suficientes como para que resulte indesplazable;

b) El cuerpo está sometido a un conjunto de (n) cargas externas [P_i], con (i=1, 2, 3, ..., n) independientes unas de otras, y cuya resultante no es nula;

c) El equilibrio del cuerpo se logra mediante las reacciones originadas en los (m) apoyos [R_j], (con j=1, 2, 3, ..., m) cuya resultante es igual y de sentido contrario a la de las cargas aplicadas;

d) Se considera solo "el trabajo de las cargas exteriores" pues al ser, por hipótesis, los apoyos *indesplazables e indeformables,* las reacciones no están en condiciones de realizar ningún trabajo.

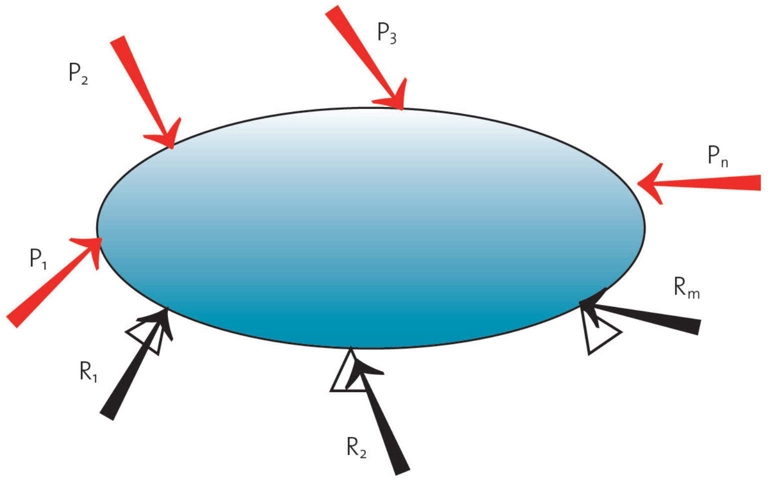


Figura 12

e) Por el *principio de conservación de la energía,* el trabajo de una carga externa cualquiera es igual a la energía de deformación que se almacena en el cuerpo originada en las deformaciones que dicha carga produce en él;

f) Siendo válido el *principio de superposición de efecto,* no interesa el orden en que comiencen a actuar las cargas, pudiendo hacerlo simultáneamente o no.

g) En consecuencia, el trabajo que realizan las cargas aplicadas a un cuerpo que sufre una *deformación virtual* viene dado por la siguiente expresión:

$$U_e = (P_1.\delta_1 + P_2.\delta_2 + \dots\dots\dots + P_n.\delta_n) \qquad [13]$$

Dado que en los cuerpos lineales elásticos los desplazamientos (δ) son funciones lineales de las cargas (P)[67] y viceversa, la expresión [13] se puede expresar como una función cuadrática de los desplazamientos o como una función cuadrática de las fuerzas exteriores, expresiones [14] y [15] respectivamente.

$$U = K.(\delta_1^2 + \delta_2^2 + ... + \delta_n^2) \qquad [14]$$

$$U = (1/k).(P_1^2 + P_2^2 + ... + P_n^2) \qquad [15]$$

6.5. Teorema de Castigliano

El teorema de Castigliano[68] expresa que *si la energía de deformación de un sólido con comportamiento mecánico lineal elástico sometido a la acción de un sistema de cargas ($P_1, P_2, ..., P_n$) totalmente independientes unas de otras, se expresa como una función de los desplazamientos ($\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$) que sufren las cargas según su dirección, la derivada parcial de la energía de deformación respecto a un desplazamiento singular cualquiera da como resultado la fuerza correspondiente a este último*. Su expresión matemática es la que sigue:

$$P_i = \partial U / \partial \delta_i \qquad [16]$$

Si tenemos en cuenta que un *trabajo virtual* (ΔU) puede obtenerse tanto dando un incremento virtual ($\Delta\delta_i$) a (δ_i) como dando un incremento virtual (ΔP_i) a (P_i), nos encontramos con que, en este último caso, el teorema de Castigliano toma la forma siguiente: *Si se expresa la energía de deformación de un cuerpo con comportamiento mecánico lineal elástico, como función de las cargas exteriores (P_i), se encuentra que la derivada parcial de la energía de deformación respecto a una de estas fuerzas exteriores da como resultado el desplazamiento de esta fuerza en su dirección.*[69] Es decir:

$$\partial U / \partial P_i = \delta_i \qquad [17]$$

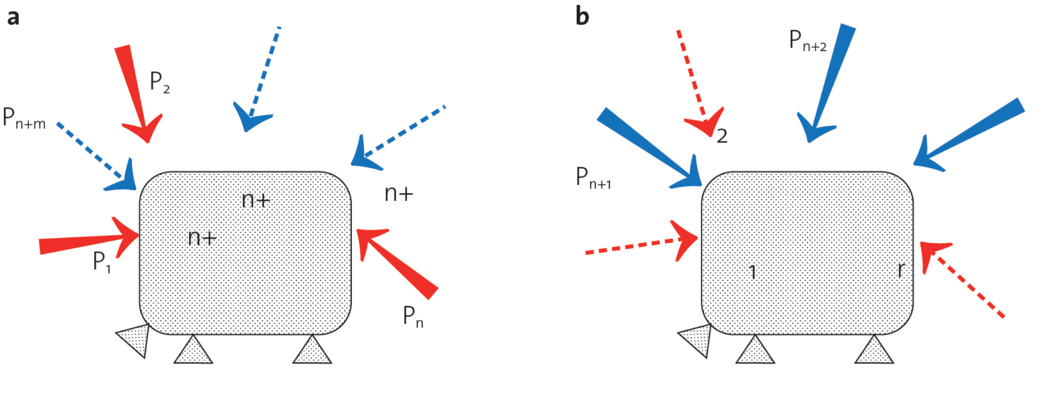
6.6. Teorema de Maxwell

El *teorema de Maxwell* o *teorema de reciprocidad*[70] afirma que (Figura 13): *Si sobre un cuerpo material con comportamiento mecánico lineal elástico, actúan dos conjuntos de fuerzas distintos (P_i) con (i=1, 2,..., n)* (Figura 13.a) *y (P_j) con (j=n+1, n+2,... n+m)* (Figura 13.b), *el trabajo que realizan las fuerzas pertenecientes al primer conjunto debido a las deformaciones que producen en el cuerpo las pertenecientes al segundo es igual al trabajo que realizan las fuerzas del segundo conjunto debido a las deformaciones que producen en el cuerpo las pertenecientes al primero.* Es decir:

$$(P_1.\delta''_1)+(P_2.\delta''_2)+ .... +(P_n.\delta''_n) =$$

$$= (P_{n+1}.\delta'_{n+1})+(P_{n+2}.\delta'_{n+2})+ .... +(P_{n+m}.\delta'_{n+m}) \qquad [18]$$

Figura 13



Según las necesidades o conveniencias operativas del problema a resolver, todo conjunto de dos o más cargas puede fraccionarse en dos conjuntos, para los cuales es válido el teorema de reciprocidad.

7. CONCLUSIONES

La Teoría de la Elasticidad no es solo una hermosa teoría matemática, si la juzgamos por la elegancia de sus demostraciones. Es, además, una herramienta de trabajo hoy por hoy insustituible para todo proyectista que busque entender cómo responde, al cargarla, la estructura que está proyectando.

Ello se debe a la relativa simplicidad de los modelos matemáticos que plantea: pese a no ser en muchos casos cuantitativamente precisos para muchos cuerpos materiales, son suficientemente precisos *cualitativamente* como para que el proyectista pueda apoyarse en ellos para *pensar* su estructura. Una vez definida esta, de ser necesario, existen innumerables instrumentos de cálculo para ajustar sus resultados todo lo que sea necesario, pero siempre en base a un tipo estructural previamente *pensado*.

Volviendo al comienzo, en el proyecto de una estructura, cuya etapa inicial dijimos que debe poderse cumplir solo con papel y lápiz, la herramienta que se usa en la enorme mayoría de los casos es la Teoría de la Elasticidad, debido a lo adecuada que resulta para *pensar* con su ayuda.[71]

8. BIBLIOGRAFÍA AMPLIATORIA

Existen innumerables textos y tratados actuales que se ocupan de la Teoría de la Elasticidad, muchos de ellos excelentemente diagramados y con gran cantidad de ejemplos de aplicación bien desarrollados. Pero, para el lector que realmente quiera profundizar sobre estos temas, nuestro consejo es que recurra a los iniciadores de su desarrollo, por ejemplo:

[1] Stephan Timoshenko: *Resistencia de materiales,* cuya primera edición en inglés es de mayo de 1930 (la primera traducción al castellano fue editada por Espasa-Calpe en 1954). Es el más completo y accesible de los textos que se pueden consultar en castellano.

[2] Gustavo Colonnetti: *Scienza delle Costruzioni,* editado por Giulio Einaudi en Turín en 1941. Recomendable por el rigor de sus demostraciones para el estudio de ciertos temas en particular. No conocemos que exista edición en castellano.

[3] Kurt Beyer: *Estática del hormigón armado,* editado inicialmente en alemán en 1927. Hay traducción al castellano editada por Nigar en Buenos Aires en 1957. Un texto muy completo, pero demasiado denso y de lectura ardua, por lo que no es aconsejable como texto guía pero sí para encontrar las respuestas que no se encuentren en otros lados.

NOTAS

1. Una aproximación a la resistencia de materiales.
2. Para convencerse trate de imaginar el lector un mundo sin sólidos.
3. A las que ya hemos definido como cuerpos materiales capaces de transmitir cargas entre diversos puntos del espacio.
4. El concepto de “estructura descargada”, tal como lo emplearemos en este texto (ver apartado 5), requiere algún tipo de aclaración: se lo puede definir, según Colonnetti (1941), como “un cuerpo en el cual los distintos elementos de volumen que lo componen y los diferentes elementos de superficie que lo limitan no están sujetos a la acción de ninguna fuerza exterior”. Sin embargo, es más general decir que, cuando se estudia el efecto sobre una estructura dada de un estado de carga también dado, se puede suponer que la estructura “está descargada” cuando este estado aún no ha comenzada a actuar. Esto no debe interpretarse como que sobre la estructura no actúa, previamente, ninguna carga, pero, de acuerdo con el Principio de superposición, que veremos más adelante, se puede estudiar el efecto sobre una estructura de un sistema de cargas, independientemente de las cargas que ya estén actuando sobre ella, por ejemplo, su peso propio, siempre y cuando la estructura no se aparte de su comportamiento lineal elástico. Además, experimentalmente no podemos saber con certeza cuándo una estructura está descargada. Todo lo que es dable conocer son las variaciones que sufre cuando se le aplica un estado de cargas dado a partir de un estado previo de *equilibrio interno,* es decir, de un estado de deformación que no varía con el tiempo. Sustituiremos, en consecuencia, el concepto de “estructura descargada” por el de “estructura de referencia”.
5. Un “punto” es un concepto matemático sin realidad física.
6. Weinberg, S. (2011). *El sueño de una teoría final.* Barcelona: Crítica.
7. Es necesario agregar el calificativo “resistentes”, pues, a partir de la corriente de pensamiento conocida como estructuralismo, que se desarrolló fundamentalmente durante el siglo XX, existen “estructuras” de los más diversos tipos, sobre todo en el campo de las humanidades.

8. Por algo existe un refrán que dice: "Una cadena siempre se rompe por su eslabón más débil".

9. Cuántos hilos van a romperse antes que se rompa el cable depende básicamente de dos factores: el número de hilos que lo componen y la dispersión en los resultados de la resistencia a rotura por tracción de cada uno de ellos.

10. La energía de la fuerza que se aplica, el trabajo que ella realiza, siempre se transforma en otro tipo de energía, cinética, en el primer caso, y de deformación, en el segundo.

11. La explicación que sigue ha sido tomada principalmente de la obra de Badiou, A. (2009). *El concepto de modelo.* Buenos Aires: La Bestia Equilátera.

12. La noción de "modelo" (M) de una teoría física (T) se caracteriza como una estructura de la forma: M = (Mat., Exp., t) consistente en una parte matemática (Mat.), una parte experimental (Exp.) y una función de traslación (t) que asocia una interpretación matemática a elementos de la parte experimental (Maria Luisa Dalla Chiara: "Meaning and theoretical inter-relations in exact sciences").

13. Chaitin, G. (2015). *El número omega.* Barcelona: Tusquets.

14. No del todo apropiado pero que el uso continuo ha convalidado. En este artículo, para evitar malas interpretaciones, en general, emplearemos el nombre mucho más adecuado de Teoría de la Elasticidad.

15. Si bien este tipo de comportamiento no se da nunca en la naturaleza, hay muchos cuerpos reales, como es el caso de los resortes, que se le aproximan mucho.

16. Algo similar ocurrió con la geometría de Euclides, inicialmente desarrollada sobre la base de cinco hipótesis básicas, pues, cuando el notable matemático alemán David Hilbert la analizó con precisión a principios del siglo XX, encontró que en realidad se empleaban en su desarrollo veinte hipótesis y/o definiciones. Según el también destacado matemático francés Henri Poincaré, estos términos, hipótesis y definiciones son equivalentes y así los consideraremos.

17. Dado que la Teoría de la Elasticidad es una teoría matemática, resulta necesario expresar los conceptos físicos que se utilicen con suficiente detalle. A este respecto existe una anécdota imaginaria que vale la pena recordar: Viajan en tren por Escocia un filósofo, un físico y un matemático y, cuando ven por la ventanilla una oveja negra, el filósofo anota en su libreta "en Escocia las ovejas son negras", el físico anota en la suya "en Escocia hay una oveja negra" y el matemático escribe "en Escocia hay al menos una oveja que tiene al menos un costado negro".

18. Esta es la definición de teoría hipotético-deductiva que propone Nicolas Bourbaki y que hemos adaptado a nuestro caso particular: la descripción del comportamiento resistente de los cuerpos materiales. En consecuencia, las únicas propiedades que interesan son las mecánicas.

19. A fin de que cada uno de los principios básicos que se adoptan incluya, en sí, un único concepto o propiedad de los cuerpos que se analizan, la cuarta de las propiedades enunciadas al comienzo de este apartado, que comprende tres conceptos diferentes, se ha dividido en tres hipótesis distintas.

20. Es decir, la energía de deformación almacenada en el cuerpo cargado.

21. Toda estructura que realiza "trabajo resistente" se carga y se deforma. La diferencia que se plantea tiene que ver con el hecho determinante del trabajo estructural: si se le aplica una carga, la estructura reacciona buscando su equilibrio, deformándose; si por el contrario se le aplica una deformación, ella reacciona cargándose.

22. Las propiedades estructurales que les dieron origen.

23. Esto implica que, en el marco de la teoría, ninguna de las hipótesis pueda ser deducida de otra u otras.

24. Enunciadas en el apartado 5.1.1.

25. La cual, en geometría analítica, representa una línea recta.

26. Como se trata de un proceso idealizado, esto ocurre sin ningún tipo de pérdida (es lo que se desprende matemáticamente de las hipótesis hechas).

27. También se lo conoce como "Módulo de Young".

28. Las cuales se encuentran normalizadas.

29. El valor que se obtiene en estos ensayos se define, estadísticamente, como igual a 2.100.000 kilogramos por centímetro cuadrado (kg/cm^2) o 210 gigapascales (GPa).

30. Esta sustitución solo es útil si para cada valor determinado de la carga (P) el de la tensión (σ) resulta constante, cosa que queda garantizada por la hipótesis de homogeneidad del material. Las tensiones no se pueden determinar experimentalmente, por lo que se suele decir que no existen en la realidad.

31. La "deformación específica" es la relación entre el alargamiento que sufre la probeta y su longitud inicial (L), por lo que: $\varepsilon = (L_{final} - L_{inicial}) / L_{inicial}$. Igual que en el caso de las tensiones, las deformaciones específicas teóricas son constantes todo a lo largo de un elemento dado como consecuencia lógica de la hipótesis de homogeneidad del material. En la realidad, para cualquier material que se considere, esto es solo una aproximación.

32. Enunciadas en el apartado 5.1.2.

33. Recordemos que un cuerpo material está en *equilibrio estático* cuando el conjunto de todas las cargas que sobre él actúan, tanto activas como reactivas, tiene resultante nula.

34. Donde (κ) es la proporción de la carga total que se ha aplicado hasta el instante considerado.

35. Imagínese un péndulo que es sacado de su posición de equilibrio y luego se deja libre. Este trata de volver a dicha posición de equilibrio, pero, cuando llega a ella, tiene una velocidad angular que hace que lo sobrepase, con lo que vuelve a estar fuera de equilibrio, pero ahora hacia el lado opuesto al del desplazamiento inicial. A partir de acá se repite la secuencia originándose en el péndulo un movimiento de tipo vibratorio.

36. Es por este motivo que los efectos de impacto, así como todo otro comportamiento estructural en el que el tiempo no pueda ignorarse, se consideran como casos particulares.

37. Lo que haría sumamente engorroso y sin mayores beneficios el incluirlos en el cálculo de la estructura. Este es uno de los motivos que fundamentan la presente hipótesis.

38. Por motivos semejantes a los de la hipótesis anterior.

39. Llegado el caso se puede hacer la misma hipótesis respecto de la unión entre dos o más placas.

40. Lo que significa que las alteraciones en el trabajo estructural que estas deformaciones originan son despreciables.

41. Esto significa que, para el mismo sistema de cargas, las solicitaciones calculadas en base a la estructura deformada son sensiblemente diferentes a las calculadas con esta sin deformar.

42. En un *cuerpo prismático* se denomina “sección recta” o “sección normal” a la figura que se obtiene cortando la pieza con un plano perpendicular a su eje.

43. En los casos prácticos esto complica las cosas puesto que hay que definir, por ejemplo, qué se va a entender por “suficientemente próximas”. Por motivos de este tipo es preferible utilizar, siempre que se pueda, la hipótesis más simple de “mantenimiento de las secciones planas” tal como fue inicialmente expuesta.

44. Colonnetti, G. (1941). *Scienza delle costruzioni*. Turín: Einaudi.

45. En la generalidad de los casos prácticos se puede hacer esta suposición también para el acero y materiales similares, dado que el error que así se comete no es significativo.

46. Expuestas en el apartado 3.2.3.

47. Por ejemplo, de sus condiciones de apoyo.

48. Sección recta: sección de una placa obtenida cortándola con un plano perpendicular a su plano medio.

49. Según el tipo de solicitación y de material de que se trate, el *eje de una pieza* puede definirse de diferentes maneras. Por ejemplo, en los materiales heterogéneos y, con más razón, en los compuestos, habrá un *eje geométrico* (definido de la forma en que terminamos de hacerlo) y un *eje mecánico* que en elementos acortados uniformemente es la curva que une los puntos de aplicación de las resultantes de compresión de cada sección.

50. Al suponerse invariables las propiedades del cuerpo, todas las acciones que sobre él actúan se consideran externas, ajenas a él, es decir, a sus propiedades mecánicas. Incluso vamos a considerar externas las causas reológicas o térmicas, las cuales producen cambios en la geometría del cuerpo causados por efectos que no dependen de sus propiedades intrínsecas.

51. El cálculo de la seguridad de una estructura es un problema estocástico que debe encararse mediante la teoría de probabilidades. En una sociedad organizada el riesgo que implique la probabilidad de falle de una estructura debe ser coherente con los riesgos que esa misma sociedad está dispuesta a aceptar como consecuencia de otras actividades sociales: accidentes aéreos o automovilísticos, inundaciones, incendios, etc.

52. Esto se puede expresar diciendo que el proceso de aplicación de las cargas insume un tiempo mayor o igual que el que necesita el proceso de deformación del cuerpo cargado. Si esto no fuese así, van a aparecer efectos de “impacto” (ver hipótesis 7).

53. En la realidad resulta imposible tener certeza de ello. Por este motivo, la definición dada resulta inaplicable y en general se la puede sustituir por la que sigue.

54. Esto lo podemos hacer en el campo de la Teoría de la Elasticidad pues solo se la utiliza en condiciones elásticas “ilimitadas” (en realidad no se hace ningún tipo de hipótesis sobre qué es lo que pasa cuando este tipo de comportamiento se supera). En la realidad hay que actuar con suma prudencia, en estos casos, para evitar que la suma del estado de referencia más el correspondiente a las cargas aplicadas nos lleve a superar el límite del comportamiento elástico.

55. O trabajo interno realizado por la estructura.

56. Para lograr el equilibrio entre las fuerzas actuantes sobre el cuerpo y las deformaciones que este sufre.

57. (δ) es una deformación de tipo genérico y representa la que sufre el cuerpo cuando se considera toda su longitud, la cual, si la carga aplicada es una fuerza axial, es una variación de longitud (ΔL), si se aplica una fuerza cortante, es una distorsión (γ) y, si se aplica un momento, es una rotación (θ).

58. Una buena forma de visualizar este hecho la constituyen los resortes.

59. Se pueden plantear desarrollos similares para todos los tipos de solicitación y sus combinaciones.

60. Demostrado por primera vez por Federico Menabrea, del Politécnico de Torino, en 1858. Su demostración se puede encontrar en G. Colonnetti.

61. Donde $\psi = \psi\ (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz,} \gamma_{zx,} \gamma_{xy})$.

62. El pandeo es la falla de un elemento comprimido (por ejemplo, una columna) por rotura de su equilibrio interno y no por rotura de una de sus secciones. Es un fenómeno que abarca a la pieza en su conjunto.

63. El valor de este límite depende de una serie de factores, como la esbeltez de la barra, que por ahora no analizaremos.

64. Cosa que resulta imposible de evitar en la práctica pues es una característica intrínseca de los materiales reales. Con aleaciones especiales estos defectos se pueden reducir en cierta medida, pero es imposible eliminarlos.

65. Se lo puede considerar equivalente, en el dominio de la resistencia de materiales, al *principio de los desplazamientos virtuales* que se emplea en el estudio del equilibrio estático de los cuerpos y que se puede expresar de la siguiente forma: *Si un cuerpo se halla en equilibrio bajo un determinado conjunto*

de cargas externas —esto implica que su resultante es nula—, la suma algebraica de los trabajos de todas las fuerzas que actúan sobre él debe ser nula para cualquier desplazamiento virtual del mismo. Un *desplazamiento virtual* es un desplazamiento imaginario y arbitrario pero posible.

66. Es físicamente posible pues debe respetar las condiciones de vínculo de la estructura.

67. Según expresión [4].

68. Cuya demostración puede encontrarse en S. Timoshenko. Ver bibliografía ampliatoria.

69. Algunos autores denominan a esta segunda forma de expresar el teorema de Castigliano como "segundo teorema de Castigliano".

70. Su demostración puede consultarse en S. Timoshenko.

71. No parece sencillo querer "pensar" una estructura basándonos en un programa de computadora.

Luis J. Lima es profesor emérito de la UNNOBA y se desempeña como director del Instituto de Investigaciones para el Desarrollo Sostenible (IIDS) y del Laboratorio de Ensayos de Materiales y Estructuras (LEMEJ). Asimismo, es presidente de la Academia de la Ingeniería de la Provincia de Buenos Aires. Entre el 2003 y el 2007 fue rector organizador de la UNNOBA y fue presidente de la Universidad Nacional de La Plata entre 1992 y 2001. Es Honorary Life Member (miembro honorario vitalicio) de la Federación Internacional del Hormigón (FIB) y Fellow de la Unión Internacional de Laboratorios y Expertos en Materiales de Construcción, Sistemas y Estructuras (RILEM).